VDC PT-HPT CHỨA CĂN

VẤN ĐỀ 1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG THAM SỐ

Các phương pháp được dùng đến gồm:

- ***Phương pháp thế***
- ***Phương pháp đặt ẩn phụ***
- ***Phương pháp ép tích***
- ***Phương pháp đánh giá***

Email: smallduck01@gmail.com

Email: vanphu.mc@gmail.com

Câu 1. Biết hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{5y+3}-\sqrt{7x-2}=2x-1-4y\end{cases}$ với $x, y\in\mathbb{R}$ có hai nghiệm $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$. Tính $S=3x_1+4y_2$.

A. $\dfrac{27}{32}$. **B.** $\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{27+6\sqrt{17}}{32}$. **D.** $\dfrac{33+6\sqrt{17}}{32}$.

Lời giải

Tác giả:Nguyễn Thị Bích,Tên FB: Bich Nguyen

Chọn B

Điều kiện xác định : $\begin{cases}y-3x+4\ge 0\\ y+5x+4\ge 0\\ x\ge\dfrac{2}{7}\\ y\ge-\dfrac{3}{5}\end{cases}$

Ta có: $\sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=\dfrac{y-3x+4-y-5x-4}{\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}}=\dfrac{-8x}{4}=-2x$

thu được hệ $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=-2x\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{y-3x+4}=4-2x$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ y=x^2-x\end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$ (điều kiện $\frac{2}{7}\le x\le 2$)

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)+(2x-\sqrt{7x-2})+4x^2-7x+2=0$

$\Leftrightarrow\left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+(x+1)}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1\right)=0$

Do $\frac{2}{7}\le x\le 2$ nên $\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+(x+1)}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1>0$

Suy ra $4x^2-7x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$ (TM) .

Với $x=\frac{7+\sqrt{17}}{8}\Rightarrow y=\frac{5+3\sqrt{17}}{32}$ (TM).

Với $x=\frac{7-\sqrt{17}}{8}\Rightarrow y=\frac{5-3\sqrt{17}}{32}$ (TM).

Hệ phương trình có hai nghiệm $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{8};\frac{5+3\sqrt{17}}{32}\right)$ và $\left(\frac{7-\sqrt{17}}{8};\frac{5-3\sqrt{17}}{32}\right)$.

Vậy $S=3x_1+4y_2=\frac{13}{4}$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases}y^3-x^3+3x^2=6y^2-16y+7x+11\\(y+2)\sqrt{x+4}+(x+9)\sqrt{2y-x+9}+x^2+9y+1=0\end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả:Nguyễn Văn Phu,Tên FB: Nguyễn Văn Phu

Chọn A

ĐK $\begin{cases}x\ge -4\\2y-x+9\ge 0\end{cases}$ (*)

Cách 1 (Lớp 10) PT thứ nhất tương đương với $(y-2)^3+4(y-2)=(x-1)^3+4(x-1)$ (1)

$\Leftrightarrow (y-x-1)[\underbrace{(y-2)^2+(y-2)(x-1)+(x-1)^2}_{\ge 0}+4]=0\Leftrightarrow y=x+1$

Cách 2 (Lớp 12) Xét hàm số $f(t)=t^3+4t\Rightarrow f'(t)=3t^2+4>0,\forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. PT (1) có dạng

$f(y-2)=f(x-1)\Leftrightarrow y-2=x-1\Leftrightarrow y=x+1$

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $(x+3)\sqrt{x+4}+(x+9)\sqrt{x+11}+x^2+9x+10=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{x+4}-3)+(x+9)(\sqrt{x+11}-4)+x^2+2x-35=0$

$\Leftrightarrow (x-5)[\underbrace{\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}+\frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4}}+(x+7)]=0$

$\Leftrightarrow (x-5)[\underbrace{(\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}+1)+\frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4}+(x+6)}_{>0,\forall x\ge -4}]=0\Leftrightarrow x=5$

Với $x=5\Rightarrow y=6$. (t/m đk (*). Vậy HPT có 1 cặp nghiệm $(x_0;y_0)=(5;6)$

Email: lyvanxuan@gmail.com

Câu 3. Số giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=m\\ x+y=2m+1\end{cases}$ có nghiệm là :

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả:Mai Ngọc Thi,Tên FB: Mai Ngọc Thi

Chọn B

Điều kiện : $x\ge -1$; $y\ge -1$.

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x+1}\\ v=\sqrt{y+1}\end{cases}$, $u,v\ge 0$ khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}u+v=m\\ u^2+v^2-2=2m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=m\\ (u+v)^2-2uv=2m+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=m\\ uv=\dfrac{m^2-2m-3}{2}\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}S=u+v\\ P=uv\end{cases}$, $S^2\ge 4P$ khi đó ta có hệ $\begin{cases}S=m\\ P=\dfrac{m^2-2m-3}{2}\end{cases}$

Theo yêu cầu bài toán : $\begin{cases} S \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S^2 \geq 4P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ \dfrac{m^2-2m-3}{2} \geq 0 \\ m^2 \geq 4.\dfrac{m^2-2m-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m^2-4m-6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 2+\sqrt{10}$

Vậy ta có $3 \leq m \leq 2+\sqrt{10}$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3,4,5\}$.

Email: nguyenthiphuong315@gmail.com

Câu 4. Hệ phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 & (1) \\ (x+1)\sqrt{y+1} + (x+6)\sqrt{y+6} = x^2 - 5x + 12y & (2) \end{cases}$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Phượng,Tên FB:Nguyễn Thị Phượng

Chọn B

Lớp 10

Phương trình (1) của hệ tương đương với

$(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$

$\Leftrightarrow (x+1-y)\left[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1-y=0 \\ (x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=y \\ x^2 + (2+y)x + y^2 + y + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = x+1$

(phương trình dưới vô nghiệm do có $\Delta = (2+y)^2 - 4(y^2+y+4) = -3y^2 - 12 < 0, \forall y$)

Thế vào pt (2) của hệ ta được:

$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x+2} - 2\right) + (x+6)\left(\sqrt{x+7} - 3\right) = x^2 + 2x - 8$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}\right)=(x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}=x+4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -(x+2)\dfrac{\sqrt{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}-(x+6)\dfrac{\sqrt{x+7}+1}{2\left(\sqrt{x+7}+3\right)}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=0 \end{array}\right.$$

Phương trình dưới vô nghiệm do vế trái luôn âm. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=2; y=3$.

Lớp 12.

Phương trình (1) của hệ tương đương với

$(x+1)^3+3(x+1)=y^3+3y$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+3>0,\forall t$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $(1)\Leftrightarrow x+1=y$

Thế vào pt (2) của hệ ta được:

$(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(x+6)\left(\sqrt{x+7}-3\right)=x^2+2x-8$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}\right)=(x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}=x+4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -(x+2)\dfrac{\sqrt{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)}-(x+6)\dfrac{\sqrt{x+7}+1}{2\left(\sqrt{x+7}+3\right)}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=0 \end{array}\right.$$

Phương trình dưới vô nghiệm do vế trái luôn âm. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=2; y=3$.

(có thể dùng máy tính để chứng minh phương trình dưới vô nghiệm).

Email: dactuandhsp@gmail.com

Câu 5. Biết hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x & (1) \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\dfrac{9}{2} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ có nghiệm $\left(\dfrac{a}{b};\dfrac{c}{d}\right)$, với $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $\dfrac{a+c}{b+d}$.

A. $\dfrac{25}{16}$. **B.** $\dfrac{25}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$ **D.** $\dfrac{25}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Đắc Tuấn,Tên FB: Đỗ Đại Học

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y}+y=x\sqrt{x^2+x}+x \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x})+(y-x)=0$

$\Leftrightarrow x\dfrac{y-x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}+x)=0$

$\Leftrightarrow y=x$ (Vì $\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}+x>0, \forall x\ge 1; y\ge 0$)

Thay vào phương trình (2), ta có: $x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{9}{2}$

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x-1} (t\ge 0) \Rightarrow t^2=2x-1+2\sqrt{x(x-1)}$

Phương trình trở thành: $t^2+1+2t=9 \Leftrightarrow t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2(tm) \\ t=-4(l) \end{array}\right.$

Với t = 2, ta có: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)}=5-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{5}{2} \\ 4x^2-4x=25-20x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{25}{16}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là: $\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{25}{16}\right)$. Suy ra: $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2.25}{2.16}=\dfrac{25}{16}$.

Phản biện :Với cách hỏi như trên, học sinh dễ dàng nhận ra hệ pt có nghiệm duy nhất và sử dụng máy tính cho kết quả nhanh chứ không cần giải, nên thay đổi câu hỏi như : Số nghiệm của hệ là….

Email: honganh161079@gmail.com

Câu 6. Biết rằng hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y+2020)^3+\dfrac{3}{x+y+2020}=4\\ x+(y+2018)^2+(y+2016)\sqrt{x^2+1}=0\end{cases}$ có hai nghiệm $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$.

Khi đó, giá trị của biểu thức $x_1.x_2$ bằng:

A. 0. **B.** -8. **C.** 4. **D.** -2.

Tác giả: Đỗ Thị Hồng Anh,Tên FB: Hong Anh

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases}(x+y+2020)^3+\dfrac{3}{x+y+2020}=4 & (1)\\ x+(y+2018)^2+(y+2016)\sqrt{x^2+1}=0 & (2)\end{cases}$$

Đặt $t=x+y+2020$, phương trình (1) trở thành: $t^3+\dfrac{3}{t}=4\Leftrightarrow\dfrac{t^4+3}{t}=4$. Suy ra $t>0$.

Áp dụng AM-GM cho 4 số dương $t^3;\dfrac{1}{t};\dfrac{1}{t};\dfrac{1}{t}$, ta có: $t^3+\dfrac{3}{t}=t^3+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t}\geq 4$

Nên pt (1) $\Leftrightarrow t^3=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow t=1$. Do đó: $x+y+2020=1\Leftrightarrow y=-x-2019$.

Thay $y=-x-2019$ vào pt (2), ta có: $x^2+3x+1-(x+3)\sqrt{x^2+1}=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}, t\geq 1$, ta có phương trình: $t^2-(x+3)t+3x=0\Leftrightarrow t=x\vee t=3$.

$t=x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=x\Leftrightarrow x\in\varnothing$

$t=3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=3\Leftrightarrow x^2=8\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

Vậy, $x_1.x_2=-8$.

Email: slowrock321@gmail.com

Câu 7. Hệ $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y}}+x+y=1 & (1) \\ 8x^2+7x+20y-13=\left(1+\dfrac{1}{1-y}\right)\sqrt[3]{3x^2-2} & (2) \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Tác giả: Đỗ Minh ĐăngTên FB: Johnson Do

Chọn B

+ Điều kiện: $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y<1 \end{cases}$

+ $(1)\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}+x=\dfrac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-(1-y)}}+1-y$.

+ Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{1-t}}+t$ trên $[0;1]$.

+ Ta có $f'(t)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\left(1+\sqrt{1-t}\right)+\dfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}}{\left(1+\sqrt{1-t}\right)^2}+1>0,\forall t\in(0;1)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Mà $\begin{cases} f(t)>f(0) \\ f(t)<f(1) \end{cases},\forall t\in(0;1)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$.

+ Mặt khác $f(x)=f(1-y)$. Suy ra nghiệm duy nhất của (1) là $x=1-y\Leftrightarrow y=1-x$.

+ Khi đó $(2)\Leftrightarrow 8x^2-13x+7=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2-2}$

+ Với $x\in(0;1]$ thì

$(2)\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+7x=(x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}\Leftrightarrow (2x-1)^3-\left(x^2-x-1\right)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+\left(x^2-x-1\right)}$

+ Đặt $\begin{cases} u=2x-1 \\ v=\sqrt[3]{3x^2-2} \end{cases}$ Ta có hệ $\begin{cases} u^3-\left(x^2-x-1\right)=(x+1)v \\ v^3-\left(x^2-x-1\right)=(x+1)u \end{cases}$. Trừ vế theo vế của hệ ta được:

$(u-v)\left(u^2+uv+v^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u^2+uv+v^2+x+1=0\ \ (*) \end{array}\right.$.

+ Nhận xét thấy $\Delta_v = u^2 - 4u^2 - 4x - 4 = -3(2x-1)^2 - 4x - 4 = -12x^2 + 8x - 7 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình (*) vô nghiệm.(Cách 2: $VT_{(*)} = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x + 1 > 0,\ \forall x \in (0;1]$. Suy ra (*) vô nghiệm.)

+ $u = v \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{8}\quad (l) \\ x = 1\quad (n) \end{array}\right.$

+ Với $x = 1 \Rightarrow y = 0$.

+ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1;0)$

Cách 2 để giải phương trình (2): Với $x \in (0;1]$ thì

$$(2) \Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 10x^2 + 7x - 2 = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + 3x^2 - 2$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^3 + (x+1)(2x-1) = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + (3x^2 - 2)$$
$$\Leftrightarrow \left[(2x-1) - \sqrt[3]{3x^2-2}\right]\left[(2x-1)^2 - (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \left(\sqrt[3]{3x^2-2}\right)^2 + (x+1)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x-1) - \sqrt[3]{3x^2-2} = 0 \\ (2x-1)^2 - (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \left(\sqrt[3]{3x^2-2}\right)^2 + (x+1) = 0\ \ (*) \end{array}\right.$$

$$VT_{(*)} = \frac{1}{4}(2x-1)^2 - (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \left(\sqrt[3]{3x^2-2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + (x+1)$$
$VT_{(*)} == \left[\frac{1}{2}(2x-1) - \sqrt[3]{3x^2-2}\right]^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + (x+1) > 0, \forall x \in (0;1]$. Suy ra (*) vô nghiệm.

Vậy $(2x-1) - \sqrt[3]{3x^2-2} = 0$ (Trở lại giải như trên)

Email: thienhoang15122007@gmail.com

Câu 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 \end{cases}$ ta được hai nghiệm $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Tính giá trị biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2$.

A. $T = -25$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 25$. **D.** $T = 50$.

Lời giải

Tác giả:: Lê Anh Dũng,Tên FB: Dũng Lê.

Chọn B

Điều kiện $y^2 \ge x^2$.

Từ phương trình

$$x+\sqrt{y^2-x^2}=12-y \Rightarrow x^2+2x\sqrt{y^2-x^2}+y^2-x^2=144-24y+y^2 \Leftrightarrow x\sqrt{y^2-x^2}=144-24y \text{ . (1)}$$

Thay $x\sqrt{y^2-x^2}=12$ vào phương trình (1) ta được: $y=5$.

Thay $y=5$ vào phương trình $x\sqrt{y^2-x^2}=12$ và giải ra ta được $x=3$ hoặc $x=4$.

Thử lại điều kiện ta được tập nghiệm của hệ là $\{(3;5),(4;5)\}$.

Ta có $T=3^2+4^2-5^2=0$.

Email: luongthanh80tm@gmail.com

Câu 9. Gọi $(x_0;y_0)$ với $y_0>0$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{32x-x^2}-2\sqrt{y^2+1}-2=y^2\\ \sqrt[3]{48x^2-2x^3}+20\sqrt{y^2+1}-60=2y^2\end{cases}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=t^2-x_0t+y_0$ với $t\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in(-15;-12)$. **C.** $m\in(-62;-60)$. **D.** $m\in(-98;-95)$.

Lời giải

Tác giả:: Nguyễn Lương Thành,Tên FB: **Luong Thanh Nguyen**

Chọn C

Điều kiện: $x\in[0;32]$.

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{32x-x^2}-2\sqrt{y^2+1}-2=y^2 & (1)\\ \sqrt[3]{48x^2-2x^3}+20\sqrt{y^2+1}-60=2y^2 & (2)\end{cases}$

Lấy $(1)+(2)$ ta được:

$$\sqrt{32x-x^2}+\sqrt[3]{48x^2-2x^3}+18\sqrt{y^2+1}-62=3y^2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{32x-x^2}+\sqrt[3]{48x^2-2x^3}=3\left(y^2+1\right)-18\sqrt{y^2+1}+59$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{32x-x^2}+\sqrt[3]{48x^2-2x^3}=3\left(\sqrt{y^2+1}-3\right)^2+32 \ (I)$$

Vì:

+ $\sqrt{32x-x^2}=\sqrt{x(32-x)}\le\dfrac{x+32-x}{2}=16$

+ $\sqrt[3]{48x^2-2x^3}=\sqrt[3]{x.x.(48-2x)}\le\dfrac{x+x+48-2x}{3}=16$

nên: $VT(I)\le 32$ và dấu "=" xảy ra khi $x=16$.

Mặt khác: $3\left(\sqrt{y^2+1}-3\right)^2+32\ge 32$ nên $VP(I)\ge 32$ và dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{y^2+1}=3$.

Do đó: $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x=16\\ \sqrt{y^2+1}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=16\\ y^2=8\end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) ta thấy thỏa mãn.

Suy ra $x_0=16, y_0=2\sqrt{2}$ và $P=t^2-16t+2\sqrt{2}=(t-8)^2-64+2\sqrt{2}\ge -64+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow m=-64+2\sqrt{2}$.

Vậy $m\in(-62;-60)$.

*** Cách khác:**

Đặt $a=\sqrt{y^2+1}\ge 1$. Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}\sqrt{32x-x^2}=a^2-2a+1 & (1)\\ \sqrt[3]{48x^2-2x^3}=2a^2-20a+58 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow a^2-2a+1=\sqrt{x(32-x)}\le\dfrac{x+32-x}{2}=16\Leftrightarrow a\in[-5;3]$.

$(2)\Leftrightarrow 2a^2-20a+58=\sqrt[3]{x.x(48-2x)}\le\dfrac{x+x+48-2x}{3}=16\Leftrightarrow a\in[3;7]$

Suy ra: $\begin{cases}a=3\\ x=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=16\\ y=2\sqrt{2}\end{cases}$.

Do đó: $x_0=16, y_0=2\sqrt{2}$ và $P=t^2-16t+2\sqrt{2}=(t-8)^2-64+2\sqrt{2}\ge -64+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow m=-64+2\sqrt{2}$.

Vậy $m\in(-62;-60)$.

Email: diephd02@gmail.com

Câu 10. Giả sử $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases}$.Khi đó giá trị của biểu thức $P=y\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{y^2+1}-xy+2x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-17;-15)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(18;20)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Ngọc DiệpTên FB: Nguyễn Ngọc Diệp

Chọn C

Điều kiện của hpt: $x\le 5, y\le 1, xy-y\ge 0$.

Xét 2 trường hợp:

TH_1: Nếu $\begin{cases} x<1 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x>0 \\ -y>0 \end{cases}$.

Khi đó: $2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \Leftrightarrow -x-2\sqrt{xy-y}-y=-5 \Leftrightarrow 1-x-2\sqrt{(-y)(1-x)}+(-y)=-4$

$\Leftrightarrow (\sqrt{1-x}-\sqrt{-y})^2=-4<0 \Rightarrow$ Hệ pt đã cho vô nghiệm.

TH_2: Nếu $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$. Khi đó: $\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)+2\sqrt{(x-1)y}+y=4 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-1}+\sqrt{y})^2=4 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y}=2 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=2-\sqrt{y} \\ \sqrt{5-x}=1-\sqrt{1-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-4\sqrt{y}+y \\ -x=-3-2\sqrt{1-y}-y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1-y}+2\sqrt{y}=1 \Leftrightarrow 4\sqrt{y-y^2}=-3y$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y\ge 0 \\ 16(y-y^2)=9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y=0$. Với $y=0 \Rightarrow x=5$. Thử lại với $x=5, y=0$ vào hpt đã cho thấy thõa mãn.

$x=5, y=0 \Rightarrow P=5$. Chọn câu **C.**

Email: Ngkhanh4283@gmail.com

Ý kiến phản biện: các giải trên quá dài, nếu ta để ý khi bình phương phương trình thứ hai của hệ ta sẽ có được biểu thức của phương trình thứ nhất, nên ta biến đổi

$\sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}\right)^2=1 \Leftrightarrow 5-x-y+2\sqrt{(5-x)(1-y)}=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy-y}+2\sqrt{(5-x)(1-y)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=y \\ (5-x)(1-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5;y=0 \\ x=y=1(loai) \end{array}\right.$

Câu 11. Biết rằng hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2} \\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ có hai nghiệm $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ với $x_1<x_2$. Biểu diễn $x_2+y_1=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ trong đó a,c là các số nguyênđương, b là số nguyên tố. Khi đó, $a+b+c=?$

A. 42. **B.** 36. **C.** 41. **D.** 48.

Lời giải

Tác giả: Ngô Gia Khánh,Tên FB: Khánh Ngô Gia

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2} & (1) \\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right) & (2) \end{cases}$$

Điều kiện $x\ge -1; y\ge 2$.

Đặt $\sqrt{x+1}=u;\sqrt{y-2}=v\ \ (u,v\ge 0)$, khi đó (1) trở thành:

$u+uv+u^2-1+5=2\left(v^2+2\right)+v \Leftrightarrow u-v+uv-v^2+u^2-v^2=0$

$\Leftrightarrow (u-v)(1+2u+v)=0$

$\Leftrightarrow u=v\ \ $ (do $u,v\ge 0 \Rightarrow 1+2u+v>0$)

$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y-2} \Leftrightarrow y=x+3$.

Thế vào (2) ta được:

$\dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \Leftrightarrow \dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\dfrac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}\ (3) \end{array}\right.$

+ $x=8 \Rightarrow y=11$ *(thỏa mãn điều kiện)*

+ $(3) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+3\right]=\left[\left(x-2\right)+3\right].\left[\left(x-2\right)^2+3\right]$ (4)

Xét hàm số $f\left(t\right)=\left(t+3\right)\left(t^2+3\right)$ với $t\in\mathbb{R}$

Có $f'\left(t\right)=3\left(t+1\right)^2\geq 0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\left(4\right)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left(x-2\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 2\\ x+1=x^2-4x+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 2\\ x^2-5x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ *(thỏa mãn điều kiện)*

Hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)$ là $\left(8;11\right)$ và $\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

Theo giả thiết $x_2=8;y_1=\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x_2+y_1=\dfrac{27+\sqrt{13}}{2}$ **.Chọn A**

Email: hmtuonguqn@gmail.com

Câu 12. Gọi $(x_0;y_0)=(a+b\sqrt{c};d+e\sqrt{c})$ (với c là số nguyên tố) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+2y^3+x(y^2+1)+2y(x^2+1)=0 \quad (1)\\ y^2=(1-\sqrt{x+3y})(x+3y-2\sqrt{y}+2) \quad (2)\end{cases}.$$

Tính gía trị của biểu thức $P=a+b-e.$

A. $P=-16.$ **B.** $P=-6\cdot$ **C.** $P=-2\cdot$ **D.** $P=1.$

Lời giải

Tác giả: Hồ Minh TườngTên FB:Hồ Minh Tường

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x+3y\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$.

Ta có (1) <=> $x^2(x+2y)+y^2(x+2y)+(x+2y)=0$ <=> $(x+2y)(x^2+y^2+1)=0$ <=> $\left[\begin{array}{l}x^2+y^2+1=0\\ x=-2y\end{array}\right.$

* Xét $x^2+y^2+1=0$ vô nghiệm.

* Xét $x=-2y$ thế vào (2) ta được $y^2=(1-\sqrt{y})(y-2\sqrt{y}+2) <=> \left(\frac{y}{1-\sqrt{y}}\right)^2=\frac{y}{1-\sqrt{y}}+2$

($y=1$ không là nghiệm)

$$<=>\left[\begin{array}{l}\frac{y}{1-\sqrt{y}}=-1 <=> y-\sqrt{y}+1=0 \text{ (vn)}\\ \frac{y}{1-\sqrt{y}}=2 <=> \left[\begin{array}{l}\sqrt{y}=-1-\sqrt{3} \text{ (vn)}\\ \sqrt{y}=-1+\sqrt{3} => y_0=4-2\sqrt{3}\to x_0=4\sqrt{3}-8\to P=-2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Chọn C

Email: Lehoayenphong1@gmail.com

Câu 13. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x-y+2}=x+3y+2 & (1)\\ (x-y)\sqrt{x-y+2}=(x+y+1)\sqrt{x+y-2} & (2)\end{cases}$

Biết hệ trên có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$ khi đó tổng x_0+y_0 bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Fb: Lê hoA.

Lời giải.

Chon C

Điều kiện: $\begin{cases}x-y+2\ge 0\\ x+y-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge y-2\\ x+y\ge 2\end{cases}(*)$.

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow(x+y)\left(\sqrt{x-y+2}-2\right)=-x+y+2\Leftrightarrow(x+y)\frac{x-y-2}{\sqrt{x-y+2}+2}=-(x-y-2)$$

$$\Leftrightarrow(x-y-2)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x-y+2}+2}+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=y+2$ (do $\frac{x+y}{\sqrt{x-y+2}+2}+1>0\ \forall x,y$ thoả mãn (*)).

Thay vào (2) ta được : $4=(2y+3)\sqrt{2y}$. Đặt $t=\sqrt{2y}\ge 0$, ta có

$$4=t^3+3t\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+4)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow \sqrt{2y}=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$. Ta có $x_0+y_0=3$ suy ra chọn C

Email: diephd02@gmail.com

Câu 14. (đã xóa do trùng bài)

Câu 15. (đã xóa do trùng bài)

Email: thanhdungtoan6@gmail.com

Câu 16. Biết rằng hệ $\begin{cases}\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\cdots+\sqrt{1+x_{2018}}=\sqrt{2018.2019}\\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\cdots+\sqrt{1-x_{2018}}=\sqrt{2017.2018}\end{cases}$ có một nghiệm là $\left(\frac{a_1}{b_1};\frac{a_2}{b_2};..;\frac{a_{2018}}{b_{2018}}\right)$ với các $\frac{a_i}{b_i}, i=\overline{1,2018}$ là các phân số tối giản. Tính tổng $S=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_{2018}}{b_{2018}}$?

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2018$. **D.** $S=2019$.

Lời giải

Tác giả:: Nguyễn Thanh Dũng,Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng

Chọn B

Điều kiện $-1\le x_i\le 1, i=\overline{1,2018}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

+) $$2018.2019=\left(\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\cdots+\sqrt{1+x_{2018}}\right)^2$$
$$\le (1+1+\cdots+1)(1+x_1+1+x_2+\cdots+1+x_{2018})$$

$$\Leftrightarrow 2018.2019\le 2018(2018+x_1+x_2+\cdots+x_{2018})$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_{2018}\ge 1\ (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{1+x_1}=\sqrt{1+x_2}=\cdots=\sqrt{1+x_{2018}}\Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_{2018}$

+) $$2017.2018=\left(\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\cdots+\sqrt{1-x_{2018}}\right)^2$$
$$\le (1+1+\cdots+1)(1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_{2018})$$

$$\Leftrightarrow 2017.2018\le 2018\left[2018-(x_1+x_2+\cdots+x_{2018})\right]$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_{2018}\le 1\ (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{1-x_1}=\sqrt{1-x_2}=\cdots=\sqrt{1-x_{2018}}\Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_{2018}$

Từ (1) và (2) cho ta $x_1+x_2+\cdots+x_{2018}=1$. Do đó hệ đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{2018}=1 \\ x_1=x_2=\cdots=x_{2018} \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_{2018}=\frac{1}{2018}$$

Vậy $S=1$.

<u>Ý kiến phản biện</u>: Với câu hỏi như trên không nhất thiết phải giải bước cuối tìm nghiệm. mặt khác trong chương trình lớp 10 không trình bày BĐT Bunhia tổng quát

GV: PHẠM HỮU ĐẢO - FB: Hữu Hữu Đảo

Câu 17. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=1 & (1) \\ x^2-6x-2=\sqrt{8-2y} & (2) \end{cases}$ có 2 cặp nghiệm $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Tính $T=x_1+x_2+y_1+y_2$.

<u>A.</u> $T=\dfrac{12+3\sqrt{5}-\sqrt{41}}{4}$ **B.** $T=\dfrac{12+3\sqrt{5}+\sqrt{41}}{4}$

C. $T=\dfrac{12-3\sqrt{5}-\sqrt{41}}{4}$ **D.** $T=\dfrac{12-3\sqrt{5}+\sqrt{41}}{4}$

LG:ĐK $y\le 4$

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(2y+\sqrt{4y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2y+\sqrt{4y^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{4y^2+1}-2y}{\left(\sqrt{4y^2+1}+2y\right)\left(\sqrt{4y^2+1}-2y\right)}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=(-2y)+\sqrt{(-2y)^2+1}$$

Đặt: t=-2y

Ta được $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=t+\sqrt{t^2+1}$

<u>CáCh 1: (Lớp 10)</u>

$$x+\sqrt{x^2+1}=t+\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow (x-t)+\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{t^2+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)+\left(\frac{x^2-t^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{t^2+1}}\right)=0 \Leftrightarrow (x-t)\left[1+\frac{x+t}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{t^2+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)+(\sqrt{t^2+1}+t)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{t^2+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=t \quad (\,do\ \sqrt{x^2+1}>|x|\ge x\ \forall x\in R \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0;\ TT:\sqrt{t^2+1}+t>0)$$

$x=t\Leftrightarrow x=-2y$.

<u>CáCh 2: (Lớp 12)</u>

$x+\sqrt{x^2+1}=t+\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow f(x)=f(t)$

Xét hàm số: f(z)= $z+\sqrt{z^2+1}$

f '(z)=$1+\dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}=\dfrac{\sqrt{z^2+1}+z}{\sqrt{z^2+1}}>0\ \forall z\in R$. Suy ra hàm số f(z) đồng biến trên R

do đó: $f(x)=f(t)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow x=-2y$

Thay: $y=-\dfrac{x}{2}$ vào pt(2) ta được

$x^2-6x-2=\sqrt{x+8}$ (*)

<u>CáCh 1:</u> Casio dùng shift solve 2 lần nhẩm 2 nghiệm và gán vào 2 biến, Tính y theo x.

<u>CáCh 2:</u> $x^2-6x-2=\sqrt{x+8}$ (*)

$\Leftrightarrow (x^2-5x-4)-\left[(x-2)+\sqrt{x+8}\right]=0$

Xét: để nhân liên hợp

$(x-2)-\sqrt{x+8}=0\Leftrightarrow \sqrt{x+8}=x-2\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x+8=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$

Thử vào phương trình (*) không thỏa mãn.

Xét: $(x-2)-\sqrt{x+8}\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$ thì trình (*)

$$\Leftrightarrow (x^2-5x-4)-\frac{\left[(x-2)+\sqrt{x+8}\right]\left[(x-2)-\sqrt{x+8}\right]}{(x-2)-\sqrt{x+8}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x-4)-\frac{x^2-5x-4}{(x-2)-\sqrt{x+8}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x-4)\left[1-\frac{1}{(x-2)-\sqrt{x+8}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x-4)\left[\frac{x-3-\sqrt{x+8}}{(x-2)-\sqrt{x+8}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x-4=0\\ x-3-\sqrt{x+8}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{5-\sqrt{41}}{2}\Rightarrow y_1=-\dfrac{5-\sqrt{41}}{4}\ (loai\ x=\dfrac{5+\sqrt{41}}{2})\\ x_2=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y_2=-\dfrac{7+3\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$$

$T=\dfrac{12+3\sqrt{5}-\sqrt{41}}{4}$ chọn đáp án **A**

Ý kiến phản biện: Các trình bày trên quá dài, có thể trình bày liên hợp ngược cho đơn giản

$$\Leftrightarrow (x^2-5x-4)-\left[(x-2)+\sqrt{x+8}\right]=0\Leftrightarrow\left[(x-2)^2-(x+8)\right]-\left[(x-2)+\sqrt{x+8}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+8}=2-x\\ \sqrt{x+8}=x-3\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$$

Họ và tên: Nguyễn Thị Tuyết Nga

Email: nAmlongkontum@gmAil.Com FB: nguyennga

Câu 18. Tìm số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=1\\ \sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}=4\end{cases}$

A. **0** **B.** **1** **C.** **2** **D.** **3**

Lời giải

ĐK $xy\geq 0$, ta thấy từ pt thứ nhất $\Rightarrow x+y>0$, do đó $x\geq 0, y\geq 0$. Từ đó ta đặt

$u=\sqrt{x}\geq 0, v=\sqrt{y}\geq 0$ thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} u^2+v^2-uv=1 \\ \sqrt{u^4+3}+\sqrt{v^4+3}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=1+3uv \\ u^4+v^4+6+2\sqrt{3u^4+3v^4+u^4v^4+9}=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=1+3uv \\ \left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2+2\sqrt{u^4v^4+3\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-6u^2v^2+9}=10 \end{cases}$$

Đặt $t=uv\Rightarrow 0\le t\le 1$ (vì $1+3uv=(u+v)^2\ge 4uv\Rightarrow uv\le 1$). Thế từ phương trình thứ nhất của hệ trên vào phương trình thứ hai ta được

$$2\sqrt{t^4-3t^2+6t+12}=t^2-2t+9\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(t^4-3t^2+6t+12\right)=\left(t^2-2t+9\right)^2 \\ t^2-2t+9\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3t^4+4t^3-34t^2+60t-33=0\Leftrightarrow (t-1)\left(3t^3+7t^2-27t+33\right)=0.$$

+) Nếu $t=1\Leftrightarrow uv=1$ ta có $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

+) Nếu $3t^3+7t^2-27t+33=0\Leftrightarrow 3t^3+7t^2+6+27(1-t)=0$ vô lí vì $0\le t\le 1$

Kết luận nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1)$

Câu 19. (đã xóa do trùng bài)

Họ tên: Đinh Thị Duy Phương *Email: DuyphuongDng@gmAil.Com*

FB : Đinh Thị Duy Phương

Câu 20. Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 & (1) \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} 2\le y\le 12 \\ 0\le 12-x^2\le 12 \end{cases}\Rightarrow 12-\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\ge 0\overset{(1)}{\Rightarrow} x\ge 0$

Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow 12\left(x^2+y\right)-2x^2y+2\sqrt{x^2y\left[144-12\left(x^2+y\right)+x^2y\right]}=144$$

Đặt $\begin{cases} x^2+y=u \\ x^2y=v \end{cases}$

Ta có:

$$12u-2v+2\sqrt{v\left(144-12u+v\right)}=144$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{v\left(144-12u+v\right)}=72-6u+v$$

$\Leftrightarrow 144v-12uv+v^2=72^2+36u^2+v^2-72.12u-12uv+144v$ với $72-6u+v\ge 0\ (*)$

$$\Leftrightarrow 36u^2-72.12u+72^2=0$$

$\Leftrightarrow u^2-24u+144=0 \Leftrightarrow u=12$ (thỏa (*))

Khi đó $y=12-x^2$

$$(2)\Leftrightarrow x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1\right)=2\left(\sqrt{10-x^2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1\right)=2\left(\frac{9-x^2}{\sqrt{10-x^2}+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2}+1}=0\ (\text{VN do } x\ge 0) \end{array}\right.$$

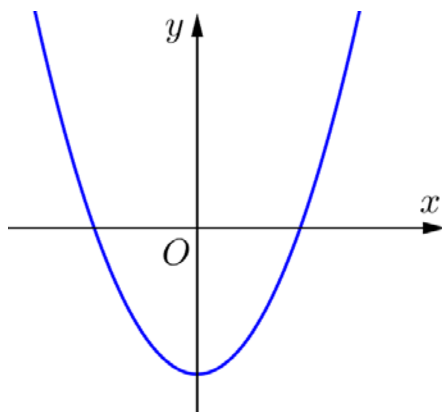
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3;3)$.

Ý kiến phản biện: Phương trình (1) có thể dùng đánh giá cho gọn

$$12=x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le \frac{x^2+12-y}{2}+\frac{y+12-x^2}{2}=12\Rightarrow y=12-x^2$$

Email: haviethoa@gmail.com

Câu 21. Cho Parabol $(P): y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Biết $(x_\circ, y_\circ)$ là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f(1+4y) = f(5-8x) \\ \sqrt{2x+3y} = 2x+y \end{cases}$ và $x_\circ + y_\circ = \dfrac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^*; \dfrac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $P = a+b$ bằng

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Tác giả:* *Hà Việt Hòa,Tên FB: Ha Viet Hoa

Chọn C

+ $\begin{cases} f(1+4y) = f(5-8x) (1) \\ \sqrt{2x+3y} = 2x+y (2) \end{cases}$

$\sqrt{2x+3y} = 2x+y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y \ge 0 (*) \\ 2x+3y = 4x^2+4xy+y^2 (3) \end{cases}$

+ $(3) \Leftrightarrow 4x^2 + 2(2y-1)x + y^2 - 3y = 0$ phương trình có nghiệm x nếu

$\Delta_1' = 4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 12y \ge 0 \Leftrightarrow 1+8y \ge 0 \Leftrightarrow 1+4y \ge \dfrac{1}{2}.$

+ $(3) \Leftrightarrow y^2 + (4x-3)y + 4x^2 - 2x = 0$ phương trình có nghiệm y nếu

$\Delta_2 = 16x^2 - 24x + 9 - 16x^2 + 8x \ge 0 \Leftrightarrow -16x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow 5-8x \ge \dfrac{1}{2}.$

+ Xét hàm số $y = f(t)$ là hàm số liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ và đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Rightarrow f(1+4y) = f(5-8x) \Leftrightarrow y = 1-2x$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{3-4x} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 0 (TM\ *) \Rightarrow a+b = 3$.

Ý kiến phản biện: Bài giải hơi phức tạp, có thể giải quyết bài toán ngắn gọn hơn bằng cách sử dụng tính đối xứng của (P)

Ta có: $f\left(1+4y\right)=f\left(5-8x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+4y=5-8x\\1+4y=-5+8x\end{array}\right.$ ....Sử dụng phương pháp thế giải hệ bình thường

Câu 22. (đã xóa do trùng bài)

Email: nhung.gvtoan@gmail.com

Câu 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x^2+x-1+2y(x-5)=y^2+2\sqrt{y}\\x+2y(x-4)=2\sqrt{x-1}\end{cases}$

Biết hệ có 2 nghiệm phân biệt $\left(x_1;y_1\right),\left(x_2;y_2\right)$. Tính giá trị của biểu thức $B=x_1+x_2+y_1+y_2$.

A. $B=7$. **B.** $B=8$. **C.** $B=6$. **D.** $B=9$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị Hồng Nhung.,Tên FB: Hongnhung Nguyen.

Chọn B.

ĐK: $x\ge 1;\ y\ge 0$.

Ta có $\begin{cases}x^2+x-1+2y(x-5)=y^2+2\sqrt{y}\\x+2y(x-4)=2\sqrt{x-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+x-1+2y(x-5)=2\sqrt{y}\\x+2y(x-4)=2\sqrt{x-1}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-(y+1)^2=2\sqrt{y}-2\sqrt{x-1} & (1)\\x+2y(x-4)=2\sqrt{x-1} & (2)\end{cases}.$$

Nhận xét $\left(x;y\right)=\left(1;0\right)$ không là nghiệm nên: $\left(1\right)\Leftrightarrow(x-y-1)(x+y+1+\dfrac{2}{\sqrt{y}+\sqrt{x-1}})=0$.

$\Leftrightarrow x-y-1=0$. (vì $x+y+1+\dfrac{2}{\sqrt{y}+\sqrt{x-1}}>0$)

Thay $y=x-1$ vào (2), ta được: $2x^2-9x+8=2\sqrt{x-1}$.

Đặt $t=\sqrt{x-1},\ (t\ge 0)$.

Ta có: $2t^4-5t^2-2t+1=0\Leftrightarrow(t+1)^2(2t^2-4t+1)=0\Leftrightarrow 2t^2-4t+1=0$.

$B=x_1+x_2+y_1+y_2=\left({t_1}^2+1\right)+\left({t_2}^2+1\right)+{t_1}^2+{t_2}^2=2\left[\left(t_1+t_2\right)^2-2t_1t_2\right]+2=8$.

Email: slowrock321@gmail.com

Câu 24. (đã xóa do trùng bài)

Câu 25. Gọi $(x_o; y_o)$ là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} \end{cases}$

Giá trị của biểu thức $x_o + y_o = a + b\sqrt{c}\,(a, b, c \in Z)$. Tính T=a+b+c.

A. 13 **B.** 14 **C.** 15 **D.** 16

Lời giải

Đk: $x \le 3$

Từ Pt (1) ta có y=x+1.

Thay vào phương trình (2) : $x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = (11 - x)\sqrt{3 - x}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 5(x+1) = (\sqrt{3-x} + 1)^3 + 5(\sqrt{3-x} + 1)(3)$

Đặt $a = x + 1; b = \sqrt{3-x} + 1$, Phương trình (3) trở thành

$a^3 + 5a = b^3 + 5b \Leftrightarrow (a - b)\left[(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} + 5\right] = 0 \Leftrightarrow a = b$

$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3-x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

Vậy hệ có nghiệm $(x_o; y_o)$ và tổng của chúng bằng $\sqrt{13} = 0 + 1.\sqrt{13} \Rightarrow a + b + c = 14$. Chọn B

C2. Có thể dùng hàm đặc trưng ngay từ pt (3)

C3. Từ phương trình $x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = (11 - x)\sqrt{3 - x}$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = [(3 - x) + 8]\sqrt{3 - x}$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = t^3 + 8t\,(t = \sqrt{3 - x})$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 11x - 9 + 3(3 - x) = t^3 + 8t + 3t^2$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 8x = t^3 + 3t^2 + 8t$

Từ đó suy ra x=t , làm tương tự như trên

Email: chthom1982@gmail.com

Câu 26. Gọi $(x_0; y_0)$, $(0 < x_0 < 1)$ là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x^2+3\right)y\sqrt{y}-\sqrt{2x}\left(2x^3+5x\right)=y^2\sqrt{y}-\sqrt{x}\left(2\sqrt{2}xy-\sqrt{2}x\right) & (1)\\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{(x+1).(y+1)+5}=\sqrt{32y} & (2)\end{cases}$$

Biết $x_0=\dfrac{a-\sqrt{b}}{c}$, (a,b,c nguyên dương và $\dfrac{a}{c}$ tối giản). Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c$?

A. $P=120$. **B.** $P=122$. **C.** $P=124$. **D.** $P=126$.

Lời giải

Tác giả : Chu Thị Thơm,Tên FB: Thom Chu

Chọn B

+/ Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x^2-y+3\ge 0\end{cases}$

+/ Ta có $(1)\Leftrightarrow x^2y\sqrt{y}-2x^3\sqrt{2x}-y^2\sqrt{y}+2xy\sqrt{2x}+3y\sqrt{y}-6x\sqrt{2x}=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(y\sqrt{y}-2x\sqrt{2x}\right)-y\left(y\sqrt{y}-2x\sqrt{2x}\right)+3\left(y\sqrt{y}-2x\sqrt{2x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(y\sqrt{y}-2x\sqrt{2x}\right).\left(x^2-y+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y\sqrt{y}-2x\sqrt{2x}=0\\ x^2-y+3=0\end{array}\right.$

+/ Xét $y\sqrt{y}-2x\sqrt{2x}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}\right)^3=\left(\sqrt{2x}\right)^3\Leftrightarrow y=2x$ thế vào (2) được

$\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{(x+1)(2x+1)+5}=\sqrt{64x}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{2x^2+3x+6}=8\sqrt{x}\quad(3)$

*/ $x=0$ không là nghiệm của (3)

*/ $x>0$: $(3)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x}}+\sqrt{\dfrac{2x^2+3x+6}{x}}=8\Leftrightarrow\sqrt{x+\dfrac{3}{x}-2}+\sqrt{2x+\dfrac{6}{x}+3}=8\quad(4)$

Đặt $t=\sqrt{x+\dfrac{3}{x}-2}$, $t\ge 0$ ta được (4) trở thành $t+\sqrt{2t^2+7}=8\quad(5)$

Giải (5) bằng cách bình phương 2 vế hoặc nhận xét vế trái đồng biến trên $[0;+\infty)$ được nghiệm

$t=3$. Với $t=3$ được $x+\dfrac{3}{x}=11 \Leftrightarrow x^2-11x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11+\sqrt{109}}{2}\notin(0;1) \\ x=\dfrac{11-\sqrt{109}}{2}\in(0;1)\end{array}\right.$

$\Rightarrow x_0=\dfrac{11-\sqrt{109}}{2}\Rightarrow a=11, b=109, c=2$

$\Rightarrow P=a+b+c=122$

*/ Xét $x^2-y+3=0 \Leftrightarrow y=x^2+3$ thế vào (2) được $\sqrt{(x+1)(x^2+4)+5}=\sqrt{32(x^2+3)}$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+4)+5=32(x^2+3)$ (6). Với $x\in(0;1)\Rightarrow \begin{cases}(x+1)(x^2+4)+5\in(9;15)\\ 32(x^2+3)\in(96;128)\end{cases}\Rightarrow (6)$ không có nghiệm $x\in(0;1)$. Vậy $P=122$. **Chọn B**

Email: **Daothihongxuandhsphnk55b@gmail.com**

Câu 27. Cho hệ sau: $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{3-y}=\sqrt{y^2-6y+11}-\sqrt{x-1} \ (1)\\ 2x\sqrt{y+8}-x^2=y+8 \ (2)\end{cases}$

Giả sử nghiệm của hệ sau là $(x_i;y_i); i=1;2;3...;n$ thì tổng tất cả các hiệu $x_i-y_i;\ i=1;2;3...;n$ bằng:

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Tác giả : **Đào Thị Hồng Xuân,*****Tên FB:*** **Hông Xuân**

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}3-y\ge 0\\ x-1\ge 0\\ y+8\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ -8\le y\le 3\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{y+8}+y+8=0\Leftrightarrow (x-\sqrt{y+8})^2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{y+8}$ (3)

Lớp 12:

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(3-y)^2+2}+\sqrt{3-y}$

Xét hàm $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}; t\ge 0$

$f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0;\forall t>0$ và $f(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$f(x-1)=f(3-y)\Leftrightarrow x-1=3-y\Leftrightarrow x+y=4\Leftrightarrow x=4-y$ Thay vào (3) ta được:

$\sqrt{y+8}=4-y$ Vì $-8\le y\le 3\Rightarrow 4-y>0$ bình phương hai vế ta được:

$y+8=(4-y)^2\Leftrightarrow y^2-9y+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=1\\y_2=-8\end{array}\right.$

TH1: $y_1=1\Rightarrow x_1=3$ thay vào hệ thỏa mãn.

TH2: $y_2=-8\Rightarrow x_2=12$ thay vào hệ không thỏa mãn (phương trình (2) vô nghiệm).

Phương trình có nghiệm duy nhất nên tổng tất cả các hiệu bằng: $x_1-y_1=2$

Lớp 10:

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{y^2-6y+11}=\sqrt{3-y}-\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x-y^2+6y-8}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{y^2-6y+11}}=\dfrac{3-y-(x-1)}{\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)^2-(3-y)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{y^2-6y+11}}-\dfrac{3-y-(x-1)}{\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}}=0$

$\Leftrightarrow(x+y-4)\left[\dfrac{(3-y)+(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{y^2-6y+11}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}}\right]=0$

$\Leftrightarrow x+y-4=0\ do\dfrac{(3-y)+(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{y^2-6y+11}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-y}+\sqrt{x-1}}>0;\forall y\le 3,x\ge 1$

Thay $x=4-y$ vào (3) ta được:

$\sqrt{y+8}=4-y$ Vì $-8\le y\le 3\Rightarrow 4-y>0$ bình phương hai vế ta được:

$y+8=(4-y)^2\Leftrightarrow y^2-9y+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=1\\y_2=-8\end{array}\right.$

TH1: $y_1=1\Rightarrow x_1=3$ thay vào hệ thỏa mãn.

TH2: $y_2=-8\Rightarrow x_2=12$ thay vào hệ không thỏa mãn (phương trình (2) vô nghiệm).

Phương trình có nghiệm duy nhất nên tổng tất cả các hiệu bằng: $x_1-y_1=2$

Email: lntien.c3lqdon@khanhhoA.edu.vn

Câu 28. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{4y^2+x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}} \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=\sqrt{4x^3-y-1} \end{cases}$ ta được nghiệm duy nhất (x,y).

Khi đó $P=x^2+y^2+xy$ nhận giá trị là

A. $P=\dfrac{27+3\sqrt{17}}{32}$ **B.** $P=\dfrac{27+\sqrt{17}}{32}$ **C.** $P=\dfrac{27+3\sqrt{17}}{16}$ **D.** $P=\dfrac{27+2\sqrt{17}}{16}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1; y\ge 1$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+y}}+\frac{1}{\sqrt{4y^2+x}}\ge\frac{2}{\sqrt{\sqrt{(4x^2+y)(4y^2+x)}}}.$$

Suy ra

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}}\ge\frac{2}{\sqrt{\sqrt{(4x^2+y)(4y^2+x)}}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x^2+y)(4y^2+x)}\ge 2(x+y)^2+x+y\Leftrightarrow 4(4x^2+y)(4y^2+x)\ge\left[2(x+y)^2+x+y\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2y^2+4(x^3+y^3)+xy\ge(x+y)^4+(x+y)^3+\frac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left[\frac{1}{4}+x^2+y^2+6xy-3(x+y)\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left[(x+y)^2-3(x+y)+4xy+\frac{1}{4}\right]\le 0\Rightarrow x=y$$

(Vì $x\ge 1; y\ge 1$ nên $(x+y)^2-3(x+y)+4xy+\frac{1}{4}\ge(x+y)^2-3(x+y)+4+\frac{1}{4}>0$)

Thay $x=y$ vào phương trình (2) ta được

$$2x\sqrt{x-1}=\sqrt{4x^3-x-1}\Leftrightarrow 4x^2(x-1)=4x^3-x-1\Leftrightarrow 4x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{8};\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$.

Email: tranquocthep@gmail.com.

Câu 29. Biết hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y = \dfrac{2x-y-1}{y-1} \\ y^3 + x^3 - 2\left(x^2+y^2\right) + 2 = 0 \end{cases}$ với $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ có nghiệm $\left(x_1; y_1\right)$ và $\left(x_2; y_2\right)$. Tính $P = x_1^2 + y_2^2$.

A. $P = \sqrt{5}$. **B.** $P = 3$. **C.** $P = \dfrac{6+3\sqrt{5}}{4}$. **D.** $P = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Quốc Thép,Tên FB: Thép Trần Quốc

Chọn B

Điều kiện $y \neq 1$.Với điều kiện đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y^3 - y^2 - y^2 + y = 2x - y - 1 \\ y^3 + x^3 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 2y^2 + 2y - 2x + 1 = 0 \\ y^3 + x^3 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 2y^2 + 2y - 2x + 1 = 0(1) \\ x^3 - 2x^2 - 2y + 2x + 1 = 0(2) \end{cases}$$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) vế theo vế ta có

$$\left(y-x\right)\left(y^2 + yx + x^2 - 2y - 2x + 4\right) = 0$$

Vì $y^2 + yx + x^2 - 2y - 2x + 4 = \dfrac{1}{2}\left[\left(y+x\right)^2 + \left(y-2\right)^2 + \left(x-2\right)^2\right] \geq 0$ và dấu bằng không xảy ra nên $y^2 + yx + x^2 - 2y - 2x + 4 > 0$ với mọi x, y.

Suy ra $x = y$. Thay vào (1) ta có $y^3 - 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện, hệ có nghiệm $\left(x, y\right) = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(x, y\right) = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Khi đó $P = 3$.

VDC PT-HPT CHỨA CĂN

VẤN ĐỀ 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2y^2+(1-m)\sqrt{1-x}+3m^2-2m}=y+m\\ 2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y\end{cases}$, m là tham số thực.Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên để hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $(x;y)$ phân biệt thỏa mãn điều kiện $2y-x\le 2023$.

A. 22. **B.** 45. **C.** 20. **D.** 35.

Lời giải

Tác giả : Cao Văn Tùng,Tên FB: Cao Tung

Email: Cvtung.lg2@BACgiAng.eDu.vn

Chọn A

ĐK: $\begin{cases}x\le 1\\ 2y^2+(1-m)\sqrt{1-x}+3m^2-2m\ge 0\end{cases}$

+) Xét phương trình $2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y,\ (2)$ đặt $a=\sqrt{1-x}\ge 0$ khi đó $x=1-a^2$ phương trình trở thành $2y^3+2\left(1-a^2\right)a=3a-y \Leftrightarrow (y-a)\left(2y^2+2ay+2a^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow y=a$ do $2y^2+2ay+2a^2+1=a^2+y^2+(a+y)^2+1>0$.

+) Với $y=a$ ta có $y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ x=1-y^2\end{cases}$.

+) Từ đó $\begin{cases}2y-x\le 2023\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+1)^2\le 45^2\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-46\le y\le 44\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le y\le 44$

+) Lấy $y=\sqrt{1-x}$ thay vào phương trình đầu ta được $\sqrt{2y^2+(1-m)y+3m^2-2m}=y+m,\ (1)$

$\sqrt{2y^2+(1-m)y+3m^2-2m}=y+m\Leftrightarrow\begin{cases}2y^2+(1-m)y+3m^2-2m=(y+m)^2\\ y\ge -m\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+(1-3m)y+2m^2-2m=0\\ y\ge -m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2m\\ y=m-1\end{array}\right.,\ (3)\\ y\ge -m\end{cases}$

+) Để hệ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì (3) phải có hai nghiệm y phân biệt thuộc $[0;44]$ điều kiện là:

$$\begin{cases} 0 \le 2m \le 44 \\ 0 \le m-1 \le 44 \\ 2m \ge -m \\ m-1 \ge -m \\ 2m \ne m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le m \le 22 \\ 1 \le m \le 45 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \\ m \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m \le 22$$

, m nguyên nên có 22 giá trị m thỏa mãn.

Email: Duyhungprudential@gmail.com

NHẬN XÉT:

- *Pt (2) hệ pt có dạng* $f(y) = f\left(\sqrt{1-x}\right), f(t) = 2t^3 + t$ *là hàm tăng trên* $\mathbb{R}$ *do đó* $y = \sqrt{1-x}$
- *Với* $y = \sqrt{1-x}$ *ứng với một x cho duy nhất một y và ngược lại. Do đó khi thế* $y = \sqrt{1-x}$ *vào pt (1). Yêu cầu bài toán tương ứng có đúng hai nghiệm y (hoặc đúng hai nghiệm x)*

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hệ phương trình trên có nghiệm

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Tác giả : ĐẶNG DUY HÙNG,Tên FB: Duy Hùng

Chọn D

Điều kiện : $x \in [-1;1]; y \in [0;2]$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 - 3(x+1)^2 = y^3 - 3y^2 \,(3)$

Vì $x \in [-1;1] \Rightarrow x+1 \in [0;2]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2, t \in [0;2] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t < 0, \forall t \in (0;2)$

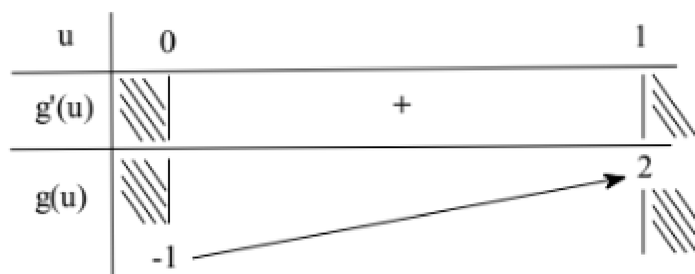
$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[0;2]$. Phương trình (3) có dạng $f(x+1) = f(y) \Rightarrow y = x+1$

Thay vào phương trình (2) ta được : $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0, x \in [-1;1] (4)$

Đặt $u = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [-1;1] \Rightarrow u \in [0;1]$, phương trình (4) trở thành $u^2 + 2u - 1 = m (5)$

Xét hàm số $g(u) = u^2 + 2u - 1$, u $\in [0;1] \Rightarrow g'(u) = 2u + 2 > 0, \forall u \in [0;1]$

BBT



Dựa vào bảng biến thiên , hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le m \le 2$. **Chọn D**

Câu 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{y^2+3} - 3\sqrt{x} & (1) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = m - 2\sqrt{1-y^2} & (2) \end{cases}$ (m là tham số).

Số các giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình trên có nghiệm là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Phương pháp lớp 10

+ Đk: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$

+ Với $x = y = 0$ hpt có nghiệm $\Leftrightarrow 2 = m - 2 \Leftrightarrow m = 4$

+ Với $x; y$ thỏa mãn điều kiện và không đồng thời bằng không.Ta có pt

$$\sqrt{x^2+3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{y^2+3} - 3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{y^2+3} + 3\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3}} + 3\frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3}} + \frac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$, do $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3}} + \dfrac{3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$

+ Với $x = y$ thế vào phương trình(2) ta được: $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = m - 2\sqrt{1-x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x^2} - m = 0 \; (*)$$

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2}$

Vì $0\le x;y\le 1$ nên $0\le t^2-2\le 2\Leftrightarrow \sqrt{2}\le t\le 2$

Khi đó pt (*) trở thành: $t^2+t-2-m=0\Leftrightarrow t^2+t-2=m$ (**)

Xét hàm số $y=t^2+t-2\ ;t\in\left[\sqrt{2};2\right]$ ta có hàm số đồng biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$

Nên phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow y(\sqrt{2})\le m\le y(2)\Leftrightarrow \sqrt{2}\le m\le 4$

Vậy hpt có nghiệm khi $\sqrt{2}\le m\le 4$

Suy ra số giá trị nguyên của m là 3.

Cách 2: Phương pháp lớp 12.

+ Điều kiện: $0\le x\le 1; 0\le y\le 1$

+ Với $x;y$ thỏa mãn điều kiện và không đồng thời bằng không.Ta có phương trình

$\sqrt{x^2+3}-3\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-3\sqrt{x}\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}+3\sqrt{x}=\sqrt{y^2+3}+3\sqrt{y}\,(*)$

Xét hàm $f\left(t\right)=\sqrt{t^2+3}+3\sqrt{t}, 0\le t\le 1$.

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}>0,\forall\, t\in\left(0;1\right]$. Hàm số $y=f(t)$ tăng trên $\left[0;1\right]$

Từ $\left(*\right)$ suy ra $f\left(x\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow x=y$.

+ Với $x=y$ thế vào phương trình(2) ta được: $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=m-2\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}-m=0\ \left(*\right)$

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2}$

Vì $0\le x;y\le 1$ nên $0\le t^2-2\le 2\Leftrightarrow \sqrt{2}\le t\le 2$

Khi đó pt (*) trở thành: $t^2+t-2-m=0\Leftrightarrow t^2+t-2=m$ (**)

Xét hàm số $y=t^2+t-2\ ;t\in\left[\sqrt{2};2\right]$ ta có hàm số đồng biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$

Nên phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow y(\sqrt{2})\le m\le y(2)\Leftrightarrow \sqrt{2}\le m\le 4$

Vậy hpt có nghiệm khi $\sqrt{2}\le m\le 4$

Suy ra số giá trị nguyên của m là 3.

Họ tên: Trần Đức Khánh

Gmail: tranduckhanh26121986@gmail.com

Facebook: Khanh Tran

Câu 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m (biết $m \geq -2019$) để hệ phương trình sau có nghiệm thực: $\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m & (1) \\ 2x^3 - x^2\sqrt[3]{y} - 2x^2 + x\sqrt[3]{y} = m & (2) \end{cases}$

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

NHẬN XÉT:

Quan sát yếu tố xuất hiện phương trình ẩn x, y ta thấy chỉ có xuất hiện $\sqrt[3]{y}$, do đó nghĩ đến phép thế biểu diễn tham số m theo hàm ẩn x. Do đó phương trình (2) nhân 2 cộng với pt (1).

Cách 1:(Lớp 10)

Nhân 2 vế của (2) với 2 rồi cộng vế với vế với (1) ta được phương trình

$$4x^3 - 3x^2 + x - \left(2x^2 - 2x + 1\right)\sqrt[3]{y} = 1 \quad (3)$$

Ta có: $2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $(3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2x^2 - 2x + 1}\right) \quad (4)$

Thay (4) vào (1) ta được phương trình

$$x^2 + x - \left[2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2x^2 - 2x + 1}\right)\right] = 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}\left(2x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{2x^2 - 2x + 1}\right) = m \quad (5)$$

Ta có: $2x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{2x^2 - 2x + 1} \geq 2\sqrt{\left(2x^2 - 2x + 1\right).\left(\frac{3}{2x^2 - 2x + 1}\right)} = 2\sqrt{3}$ (BĐT: AM- GM)

Nên vế trái $(5) \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$. Suy ra HPT đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

Lại có: $m \in \mathbb{Z}$; $m \geq -2019$ nên $m \in \{-2019; -2018; ...; 0\}$. Đáp án: **C**

Cách 2: (Lớp 12)

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-x\right)+\left(2x-\sqrt[3]{y}\right)=1-2m \\ \left(x^2-x\right).\left(2x-\sqrt[3]{y}\right)=m \end{cases} \quad (II)$

Đặt $x^2-x=u\left(u\ge -\frac{1}{4}\right)$; $2x-\sqrt[3]{y}=v$

Hệ (II) trở thành $\begin{cases} u+v=1-2m \\ u.v=m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v=1-2m-u \\ -u^2+u=m(2u+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1-2m-u \\ \frac{-u^2+u}{2u+1}=m \end{cases}$; $(u\ge -\frac{1}{4}\Rightarrow 2u+1>0)$

Xét hàm số $f(u)=\frac{-u^2+u}{2u+1}$ với $u\ge -\frac{1}{4}$

$f'(u)=\frac{-2u^2-2u+1}{(2u+1)^2}$; $f'(u)=0\Leftrightarrow u=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

BBT

u	$\frac{-1}{4}$		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$+\infty$
$f'(u)$		+	0	−	
$f(u)$		↗	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$

Từ BBT suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\le \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Lại có: $m\in \mathbb{Z}$; $m\ge -2019$ nên $m\in \{-2019;-2018;...;0\}$. Đáp án: **C**

Email: tranthanhha484@gmail.com

NHẬN XÉT: Cách 3.

$$1-\frac{1}{4}\left(2x^2-2x+1+\frac{3}{2x^2-2x+1}\right)=m \qquad (5)$$

Đặt $t=2x^2-2x+1, t\geq\frac{1}{2}$ *ta có* $m=1-\frac{1}{4}\left(t+\frac{3}{t}\right)$ *. Đến đây khảo sát hàm t là OK.*

Câu 5. Tìm các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=m\\ x+y=3m\end{cases}$$

Biết $m\in[a;b]$. Giá trị biểu thức $T=-2018a+2019b-2020$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(4000;4100)$. **B.** $(4100;4200)$. **C.** $(4200;4300)$. **D.** $(4300;4500)$.

Họ và tên: Trần Thanh Hà -Tên FB: Hà Trần

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x\geq -1; y\geq -2$.

Đặt : $\begin{cases}u=\sqrt{x+1}\ (u\geq 0)\\ v=\sqrt{y+2}\ (v\geq 0)\end{cases}$ ta có hệ phương trình: (*) $\begin{cases}u+v=m & (1)\\ u^2+v^2=3(m+1) & (2)\end{cases}$ ($(u\geq 0, v\geq 0)$

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình (*) có nghiệm thực u,v thỏa mãn điều kiện : $u\geq 0, v\geq 0$..

Hướng 1(Sử dụng phương pháp hình học):

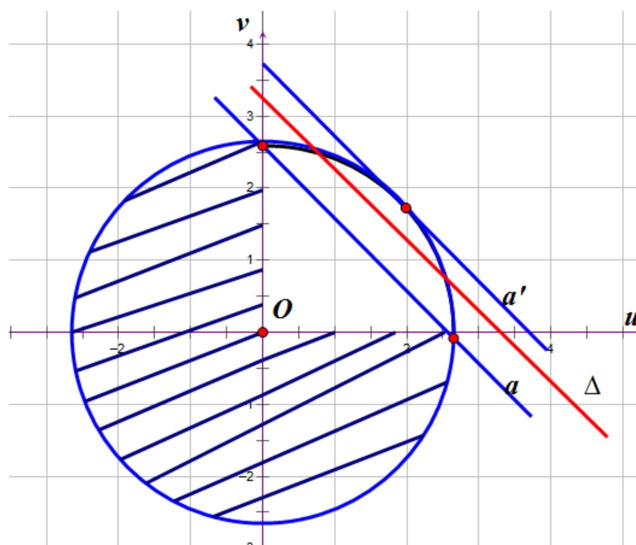
Nhận xét:

+ PT (1) có dạng phương trình đường thẳng, gọi đường thẳng đó là đường thẳng (Δ) .

+ PT (2) có dạng phương trình đường tròn, gọi phương trình đường tròn đó là (C).

Đường tròn (C) có:

$$\begin{cases}\text{Tâm } O(0;0)\\ \text{Bán kính } R=\sqrt{3(m+1)}\end{cases}.$$



Hệ (*) có nghiệm khi đường thẳng (Δ) cắt đường tròn (C) tại ít nhất 1 điểm.

$$\Leftrightarrow \frac{R\sqrt{2}}{2} \le d(O;(\Delta)) \le R \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6(m+1)} \le \frac{|m|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{3(m+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-3\ge 0 \\ m^2-6m-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \\ x \ge \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \\ 3-\sqrt{15} \le x \le 3+\sqrt{15} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\frac{3+\sqrt{21}}{2} \le x \le 3+\sqrt{15}}.$$

Suy ra: $a = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}; b = 3+\sqrt{15} \Rightarrow T = -2018a + 2019.b - 2020 = 4205,7345.$

Vậy : $T \in (4200;4300)$.

<u>Hướng 2</u>(Sử dụng phương pháp giải hệ phương trình đại số):

Đặt: $u = t.v\,(t \ge 0)$. Khi đóhệ phương trình(*) trở thành:

$$\begin{cases} v(t+1) = m \\ v^2(t^2+1) = 3(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2(t+1)^2 = m^2 & (3) \\ v^2(t^2+1) = 3(m+1) & (4) \end{cases} (**)$$

Do $m \ge 0 \Rightarrow v = 0$ không là nghiệm của phương trình (4) $\Rightarrow$ không là nghiệm của hệ $(**)$. Chia từng vế của phương trình (3) cho phương trình (4) ta được:

$$\frac{(t+1)^2}{t^2+1} = \frac{m^2}{3(m+1)} \Leftrightarrow \frac{2t}{t^2+1} = \frac{m^2}{3(m+1)} - 1.$$

$$t\ge 0\Rightarrow 0\le \frac{2t}{t^2+1}\le 1\Rightarrow 1\le \frac{m^2}{3(m+1)}\le 2$$

Do $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-3\ge 0\\ m^2-6m-6\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\\ x\ge \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\\ 3-\sqrt{15}\le x\le 3+\sqrt{15}\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\le x\le 3+\sqrt{15}}$

.

Hướng 3(Đưa về bài toán giải và biện luận phương trình bậc hai):

Từ PT (1) của hệ (*) ta có: $u=m-v$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$2v^2-2mv+m^2-3m-3=0.(5)$$

Bài toán trở thành:

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình (5) có nghiệm u, v thỏa mãn: $u\ge 0, v\ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=-m^2+6m+6\ge 0.\\ S=u+v=m\ge 0\\ P=u.v=\frac{1}{2}(m^2-3m-3)\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m-6\le 0.\\ m\ge 0\\ m^2-3m-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \boxed{\frac{3+\sqrt{21}}{2}\le x\le 3+\sqrt{15}}$$

Hướng 4 (Sử dụng định lý đảo của định lý Viet)

$$\begin{cases} u+v=m & (1)\\ u^2+v^2=3(m+1) & (2)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=m\\ u.v=\dfrac{m^2-3m-3}{2}\end{cases}$$

Bài toán trở thành:

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình (5) có nghiệm u, v thỏa mãn điều kiện: $u\ge 0, v\ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2\ge 4P\\ m\ge 0\\ \dfrac{m^2-3m-3}{2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2\ge 2\left(m^2-3m-3\right)\\ m\ge 0\\ \dfrac{m^2-3m-3}{2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m-6\le 0\\ m\ge 0\\ m^2-3m-3\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\\ x\ge \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\\ m\ge 0\\ 3-\sqrt{15}\le x\le 3+\sqrt{15}\end{cases}\Leftrightarrow \boxed{\frac{3+\sqrt{21}}{2}\le x\le 3+\sqrt{15}}..$$

Email: thuyhung8587@gmail.com

Câu 6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hệ pt sau có hai nghiệm:

$$\begin{cases}\sqrt{m^2+2-x^2-2y}-y+1=0\\4x^2+9y^2=36\end{cases}$$

Khi đó tổng bình phương tất cả các phần tử của S là:

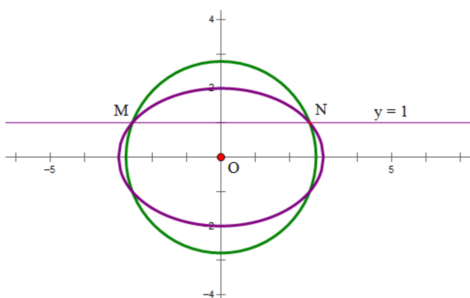
A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 18.

Lời giải

Tác giả : Cấn Việt Hưng,Tên FB: Viet Hung

Chọn B

Cách 1 :



HPT $\Leftrightarrow \begin{cases}y\geq 1=0 & (1)\\x^2+y^2=m^2+1 & (2)\\\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 & (3)\end{cases}$

Ta thấy (2) là phương trình đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=\sqrt{m^2+1}$

(3) là phương trình Elip (E)

Gọi M, N là giao điểm của Elip (E) với đường thẳng y = 1.

y = 1 $\Rightarrow 4x^2+9=36 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM=ON=\dfrac{\sqrt{31}}{2}$

Kết hợp (1) với (3) ta được cung Elip nhỏ $\overset{\frown}{MN}$

Để hệ pt có hai nghiệm thì đường tròn (C) phải cắt cung Elip nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ tại hai điểm phân biệt.

ĐK: $2<R\leq\dfrac{\sqrt{31}}{2} \Leftrightarrow 2<\sqrt{m^2+1}\leq\dfrac{\sqrt{31}}{2}$

$\Leftrightarrow 4 < m^2 + 1 \le \dfrac{31}{4} \Leftrightarrow 3 < m^2 \le \dfrac{27}{4}$

Vì m là số nguyên $m = \pm 2$. Chọn đáp án **B.**

Cách 2 :

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = m^2 + 1 & (2) \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 & (3) \end{cases}$

Giải hpt gồm (2) và (3) ta được

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 9m^2 - 27 \\ 5y^2 = 32 - 4m^2 \end{cases}$

ĐK để hpt có hai nghiệm là: $\begin{cases} 5x^2 = 9m^2 - 27 > 0 \\ 5y^2 = 32 - 4m^2 \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m^2 < \dfrac{27}{4}$

Vì m là số nguyên $m = \pm 2$. Chọn đáp án **B.**

Giáo viên : Mai Ngọc Thi

Email : lyvAnxuAn@gmAil.Com

Facebook : Mai Ngọc Thi

Câu 7. Số giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m \\ x + y = 2m + 1 \end{cases}$ có nghiệm là :

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

NHẬN XÉT: [Tương tự câu 5]

Chọn B

Điều kiện : $x \ge -1$; $y \ge -1$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y+1} \end{cases}$, $u, v \ge 0$ khi đó ta có hệ phương trình

$\begin{cases} u + v = m \\ u^2 + v^2 - 2 = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ (u+v)^2 - 2uv = 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ uv = \dfrac{m^2 - 2m - 3}{2} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = u + v \\ P = uv \end{cases}$, $S^2 \geq 4P$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} S = m \\ P = \dfrac{m^2 - 2m - 3}{2} \end{cases}$

Theo yêu cầu bài toán : $\begin{cases} S \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S^2 \geq 4P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ \dfrac{m^2 - 2m - 3}{2} \geq 0 \\ m^2 \geq 4.\dfrac{m^2 - 2m - 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m^2 - 4m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 2 + \sqrt{10}$

Vậy ta có $3 \leq m \leq 2 + \sqrt{10}$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3,4,5\}$.

Email: quangnam68@gmail.com

Câu 8. Cho hệ phương trình

$\begin{cases} 1 + |y| - \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 0 \\ y^2 + (m-1)(x^2 - 2x) = m^2 - 4m + 3 \end{cases}$ (m là tham số).

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Giá trị tổng các phần tử của tập S là :

A. -3. **B.** 3. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Quang Nam,Tên FB: Quang Nam

Chọn B

Hệ đã cho tương đương

$\begin{cases} 1 + |y| - \sqrt{(x-1)^2 + 1} = 0 \\ y^2 + (m-1)(x-1)^2 = m^2 - 3m + 2 \end{cases}$ (1)

Ta thấy: nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(2 - x_0; -y_0)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình.

Điều kiện cầnđể hệ có nghiệm duy nhất là :

$\begin{cases} x_0 = 2 - x_0 \\ y_0 = -y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ thay vào (1) : $m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

+) với $m = 1$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 1+|y|-\sqrt{(x-1)^2+1}=0 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases} \text{ (TM)}$$

+) với $m=2$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 1+|y|-\sqrt{(x-1)^2+1}=0 \\ y^2+(x-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases} \text{ (TM)}$$

Vậy $S=\{1;2\} \Rightarrow$ Giá trị tổng các phần tử của tập S là : $1+2=3$

Email: vannguyen300381@gmail.com

Câu 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=1 \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}=m \end{cases}$

Giá trị nhỏ nhất của m để hệ phương trình có nghiệm gần nhất với số nào sau đây?

A. $3,8$ **B.** $3,2$ **C.** 3 **D.** $6,4$

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị VânTên FB: Vân Nguyễn Thị

Chọn B

Đặt $a=x+\sqrt{x^2+1}, b=y+\sqrt{y^2+4}$. Do $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}>|x| \\ \sqrt{y^2+4}>|y| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}+x>|x|+x\ge 0 \\ \sqrt{y^2+4}+y>|y|+y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$

Ta có: $\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{x^2+1}-x, \frac{4}{b}=\frac{4}{\sqrt{y^2+4}+y}=\sqrt{y^2+4}-y$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} ab=1 & (1) \\ a+b+\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=2m & (2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow 2m=a+b+\frac{4a+b}{ab}=5a+2b\ge 2\sqrt{10ab}\ge 2\sqrt{10} \Rightarrow m\ge\sqrt{10}$$

Với $m=\sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} 5a=2b \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{10}}{5} \\ b=\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{-3\sqrt{10}}{20} \\ y=\frac{1}{2}\left(b-\frac{4}{b}\right)=\frac{-3\sqrt{10}}{20} \end{cases}$

Vậy GTNN của m để hệ phương trình có nghiệm là $\sqrt{10}\approx 3,2$

Email: NguyenCongkm2@gmAil.Com

Câu 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{x-2y}=3\\ \sqrt{2x+y}+5x-5y+\dfrac{1}{16}=m\end{cases}$

Số giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ duy nhất là

A. 14 **B.** 17 **C**. 16 **D.** 17

Lời giải

Họ tên tác giả: Nguyễn Văn CôngTên FB***: Nguyễn Văn Công***

Chọn C

Đặt $a=\sqrt{2x+y};\ b=\sqrt{x-2y}\Rightarrow a,b\in[0;3];\ b=3-a$

Rút ra được $x=\dfrac{2a^2+b^2}{5}=\dfrac{3a^2-6a+9}{5}$; y=$\dfrac{a^2-2b^2}{5}=\dfrac{-a^2+12a-18}{5}$.

Nhận thấy rằng với một giá trị của $a\in[0;3]$ cho ta một giá trị $(x;y)$.

Hệ phương trình đã cho có dạng $\begin{cases}a+b=3\\ a+a^2+3b^2+\dfrac{1}{16}=m \quad (2)\end{cases}$

Thế $b=3-a$ vào (2) ta có phương trình $4a^2-17a+\dfrac{433}{16}=m$ (3).

Yêu cầu đề bài dẫn đến phương trình (3) có nghiệm duy nhất $a\in[0;3]$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(a)=4a^2-17a+\dfrac{433}{16}$

a	0		$\frac{17}{8}$		3
$f(a)$	12,0625	↘	9	↗	27,0625

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m=9;\ 12,0625<m\le 27,0625$. **Chọn C**

Email: tambc3vl@gmail.com

Câu 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m\end{cases}$. Gọi $[a;b]$ là đoạn chứa các giá trị thực của m để hệ đã cho có nghiệm. Tính $a-b$?

A. 0. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x}$; $v=\sqrt{y}$; $u\ge 0$; $v\ge 0$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}u+v=1\\ u^3+v^3=1-3m\end{cases}(*)\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1\\ uv=m\end{cases}$

u,v là hai nghiệm của phương trình: $X^2-X+m=0\ (**)$

Hệ đã cho có nghiệm $(x;y)\Leftrightarrow$ hệ $(*)$ có nghiệm $u\ge 0$; $v\ge 0\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có hai nghiệm X không âm $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S\ge 0\\ P\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-4m\ge 0\\ 1\ge 0\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\frac{1}{4}\\ 1\ge 0\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$

Suy ra $a-b=-\frac{1}{4}$.

tác giả : Nguyễn Thanh Tâm,Tên FB: Tâm Nguyễn

Gmail: YurinohAnA811@gmAil.Com

Câu 12. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} & (1)\\ \sqrt{2y^2+1}+y=m+\sqrt{x+4} & (2)\end{cases}$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hiền,Tên FB: Hien Nguyen

Điều kiện $-4\le x\le 1$

Cách 1: lớp 12.

$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \sqrt{1-x}$. Xét $f(t) = 2t^3 + t$ trên R. Dễ thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà từ PT có $f(y) = f\left(\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 1 - y^2, (y \ge 0)$.

Thay vào (2) ta có: $m = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2} (3)$ với $0 \le y \le \sqrt{5}$. Xét $g(y) = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2}$ trên $\left[0;\sqrt{5}\right]$, $g'(y) = \dfrac{2y}{\sqrt{2y^2+1}} + 1 + \dfrac{y}{\sqrt{5-y^2}} > 0$, $\forall y \in \left(0;\sqrt{5}\right)$ nên $g(y)$ đồng biến trên $\left[0;\sqrt{5}\right]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow g(0) \le m \le g\left(\sqrt{5}\right)$, hay $1 - \sqrt{5} \le m \le \sqrt{11} + \sqrt{5}$. Mà m nguyên nên $m \in \{-1;0....5\}$, có 7 giá trị. **Chọn A**

Cách 2: Lớp 10

$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \sqrt{1-x}$. Đặt $b = \sqrt{1-x}$, ta có $(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2b^3 + b \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(y-b)\left(y^2 + yb + b^2\right) = b - y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = b \\ 2\left[\left(y + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4}\right] = -1 (vn) \end{array}\right. .$$

Vậy $y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 1 - y^2, (y \ge 0)$. Thay vào (2) ta có: $m = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2} (3)$ với $0 \le y \le \sqrt{5}$. Xét $g(y) = \sqrt{2y^2+1} + y - \sqrt{5-y^2}$ trên $\left[0;\sqrt{5}\right]$

Dễ thấy $1 \le \sqrt{2y^2+1} \le \sqrt{11}$; $-\sqrt{5} \le -\sqrt{5-y^2} \le 0$, do đó $\min\limits_{\left[0;\sqrt{5}\right]} g(y) = 1 - \sqrt{5} \Leftrightarrow y = 0$;

$\max\limits_{\left[0;\sqrt{5}\right]} g(y) = \sqrt{11} + \sqrt{5} \Leftrightarrow y = \sqrt{5}$. Hệ PT có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} \le m \le \sqrt{11} + \sqrt{5}$. Mà m nguyên nên $m \in \{-1;0....5\}$, có 7 giá trị. **Chọn A**

Email: **triChinhsp@gmAil.Com**

Câu 13. Hệ phương sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} 3x - a\sqrt{y^2+1} = 1 \\ x + y + \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = a^2 \end{cases}$ với các giá trị $a_1; a_2$ thì tổng $a_1 + a_2$ là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Tác giả : **Nguyễn Trí Chính** ***Tên FB:*** **Nguyễn Trí Chính**

Chọn A

$$\begin{cases} 3x-a\sqrt{y^2+1}=1 \\ x+y+\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-a\sqrt{y^2+1}=1 \\ x+\sqrt{y^2+1}=a^2 \end{cases} (I)$$

Điều kiện cần: Thấy rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì hệ cũng có nghiệm ($x_0, -y_0$) , bởi vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $y_o=0$. Thay $y_o=0$ vào (I) có $\begin{cases} 3x-a=1 \\ x+1=a^2 \end{cases} \Rightarrow 3a^2-a-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{4}{3} \end{array} \right.$

Điều kiện đủ: $a=-1$, hệ (I)trở thành $\begin{cases} 3x+\sqrt{y^2+1}=1 \\ x+\sqrt{y^2+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$

$a=\dfrac{4}{3}$, hệ (I) trở thành $\begin{cases} 3x-\dfrac{4}{3}\sqrt{y^2+1}=1 \\ x+\sqrt{y^2+1}=\dfrac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{9} \\ y=0 \end{cases}$. Hệ có nghiệm $(x=\dfrac{7}{9}; y=0)$ là duy nhất

Vậy tập hợp các giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left\{a=-1; a=\dfrac{4}{3}\right\}$

Suy ra $a_1+a_2=\dfrac{1}{3}$.

Email: *tvluAtC3tt@gmAil.Com*

Câu 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-y+m=0 & (1) \\ \sqrt{xy}+y=2 & (2) \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2019]$ để hệ phương trình có nghiệm?

A. 2018 . **B.** 2019 . **C.** 2017 . **D.** 2017 .

Lời giải

Tác giả :Trần LuậtTên FB: Trần Luật

Chọn A

Điều kiện: $xy\ge 0$.

Cách lớp 10:

Ta có $(1)\Leftrightarrow x=y-m$. Thay $x=y-m$ vào (2) ta có

$$\sqrt{xy}+y=2 \Leftrightarrow \sqrt{y(y-m)}+y=2 \Leftrightarrow \sqrt{y(y-m)}=2-y \Leftrightarrow \begin{cases} 2-y\ge 0 \\ y(y-m)=(2-y)^2 \end{cases}$$

$\begin{cases} y \le 2 \\ y^2 - my = y^2 - 4y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 2 \\ (4-m)y = 4 \ (*) \end{cases}$.

Nếu $4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4$ khi đó $(*) \Leftrightarrow 0 = 4$ (vô lý) $\Rightarrow m = 4$ không thỏa mãn.

Nếu $4 - m \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 4$ khi đó $(*) \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{4-m}$.

Do $y \le 2$ nên $\dfrac{4}{4-m} \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{2m-4}{4-m} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m \le 2 \end{array}\right.$.

Theo đề bài m là số nguyên $m \in [0;2019]$ nên $m \in \{0;1;2;5;6;...;2019\}$. Vậy có 2018 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Cách lớp 12:

Ta có $\sqrt{xy} + y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 2 - y \ (*)$. Do $y = 0$ không thỏa mãn phương trình $(*)$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 2 \\ x = \dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} \end{cases}$.

Thay $x = \dfrac{y^2 - 4y + 4}{y}$ vào phương trình (1) ta được $\dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} - y + m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4y - 4}{y} \quad (4)$.

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm $y \le 2$.

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{4y-4}{y}$ với $y \le 2$, ta có

$f'(y) = \dfrac{4}{y} > 0$ với $\forall y \in (-\infty;0)$ và $(0;2]$.

Ta có bảng biến thiên

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(y)$		$+$	||	$+$	
$f(y)$	4 ↗	$+\infty$	||	$-\infty$ ↗	2

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (4) có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m > 4 \end{array}\right.$.

Do m là số nguyên và $m \in [0;2019]$ nên $m \in \{0;1;2;5;6;...;2019\}$. Vậy có 2018 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Email: tuancaohoc17@gmail.com

Câu 15. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{4-2x-3y^2}+x+y=0\\ \left(y^2+4y+7\right)\left(x^2+1\right)=-m^4+2m^2+3\end{cases}$.

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hệ phương trình có nghiệm thực ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Tuấn,Tên FB: Nguyễn Tuấn

Chọn B

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{4-2x-3y^2}+x+y=0 & (1)\\ \left(y^2+4y+7\right)\left(x^2+1\right)=-m^4+2m^2+3 & (2)\end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow \sqrt{4-2x-3y^2}=-(x+y)\Leftrightarrow \begin{cases}x+y\le 0\\ x^2+2(y+1)x+4y^2-4=0 \quad (3)\end{cases}$

Để tồn tại x trong phương trình (3) ta phải có $\Delta'_x=(y+1)^2-4y^2+4=-3y^2+2y+5\ge 0\Leftrightarrow -1\le y\le \frac{5}{3}$.

Ta có $(2)\Leftrightarrow \left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right]\left(x^2+1\right)=3-m^4+2m^2$

$\Leftrightarrow \left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right]\left(x^2+1\right)=4-\left(m^2-1\right)^2 \quad (4)$

Với mọi $x,\ y$ thoả mãn: $y\in\left[-1;\frac{5}{3}\right]$, $x+y\le 0$ ta có:

VT(4)=$\left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right]\left(x^2+1\right)\ge 4$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0, y=-1$

VP(4)$=4-\left(m^2-1\right)^2\le 4$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=\pm 1$

Do đó điều kiện cần để hệ có nghiệm thực là $m=\pm 1$.

Với $m=\pm 1$. Khi đó $(4)\Leftrightarrow \left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right]\left(x^2+1\right)=4\Leftrightarrow x=0, y=-1$ (thỏa mãn (1)).

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m sao cho hệ phương trình có nghiệm thự**C.**

Email: duyhung2501@gmail.com

Câu 16. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)^2-y^2=4\left(\sqrt{x^2+2x+5}-\sqrt{y^2+4}\right) & (1)\\ |x+1|-|y|+m=x^2-4x+3 & (2)\end{cases}$

Tìm số giá trị nguyên của $m\in[-20;20]$ để hệ đã cho có nghiệm.

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

Tác giả :Tăng Duy Hùng,Tên FB:Hùng Tăng

Lời giải

Chọn C

pt(1) $\Leftrightarrow x^2+2x+5-4\sqrt{x^2+2x+5}=y^2+4-4\sqrt{y^2+4}$ (*)

Xét $f(t)=t^2-4t$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Vì $x^2+2x+5\ge 4; y^2+4\ge 4$ Nên (*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)=f\left(\sqrt{y^2+4}\right)\Leftrightarrow (x+1)^2=y^2\Leftrightarrow |x+1|=|y|$

Thế vào (2) ta được: $x^2-4x+3=m$ (**)

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge -1$

Mà $m\in[-20;20]$ nên có 22 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán

Email: vutoAnpvD@gmAil.Com

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2-3x+\sqrt{100-y}+1-m^2=0 \\ x\sqrt{100-y}+\sqrt{y(100-x^2)}=100 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ thỏa $x+y\le 80$.

A. 5. **B.** 6 . **C.** 10 . **D.** 9.

Lời giải

Tác giả: Vũ Huỳnh ĐứC. **Tên facebook: Huỳnh ĐứC.**

Chọn B

$$(I)\begin{cases} x^2-3x+\sqrt{100-y}+1-m^2=0\ (1) \\ x\sqrt{100-y}+\sqrt{y(100-x^2)}=100\ (2) \end{cases}$$

Đặt $t=\sqrt{100-y}\Rightarrow y=100-t^2, t\ge 0.$

(2) trở thành $xt+\sqrt{(100-t^2)(100-x^2)}=100\Leftrightarrow\sqrt{(100-t^2)(100-x^2)}=100-xt$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 100-xt\ge 0 \\ (100-t^2)(100-x^2)=(100-xt)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 100 - xt \geq 0 \\ -100x^2 - 100t^2 = -200xt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - xt \geq 0 \\ (x-t)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ t = x \end{cases}$ hay $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ \sqrt{100 - y} = x \end{cases}$

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + \sqrt{100-y} + 1 - m^2 = 0 \\ \sqrt{100-y} = x \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m^2 = 0 \\ y = 100 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm m \\ y = 100 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ y = 100 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (100 - x^2) \leq 80 \\ 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq x \leq 10.$

+ Nếu $x = 1 - m$ thì $5 \leq 1 - m \leq 10 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -4$ (loại).

+ Nếu $x = 1 + m$ thì $5 \leq 1 + m \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 9$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương của m thỏa đề bài, đó là $m \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Email: honganh161079@gmail.com

Câu 18. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2018} + |y+1| = m \\ |x|\sqrt{y^2 + 2y + 2018} = \sqrt{2018 - x^2} - m \end{cases}$$

A. $m \in (0; 50)$. **B.** $m \in (50; 100)$. **C.** $m \in (2000; 2050)$. **D.** $m \in (4000; 4050)$.

Tác giả : Đỗ Thị Hồng Anh,Tên FB: Hong Anh

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = y + 1$, hệ phương trình đã cho trở thành : $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2018} + |z| = m \\ |x|\sqrt{z^2 + 2017} = \sqrt{2018 - x^2} - m \end{cases}$.

Nhận xét: nếu hệ có nghiệm $(x_0; z_0)$ thì hệ cũng có nghiệm $(-x_0; -z_0)$.

Do đó, hệ có nghiệm duy nhất khi $x_0 = z_0 = 0$. Thay vào hệ, ta có $m = \sqrt{2018}$.

Thử lại: thay $m = \sqrt{2018}$ vào hệ phương trình, ta có: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2018} + |z| = \sqrt{2018} & (1) \\ |x|\sqrt{z^2 + 2017} = \sqrt{2018 - x^2} - \sqrt{2018} & (2) \end{cases}$.

Ta có $\sqrt{x^2+2018}+|z|\ge\sqrt{2018}$ nên pt (1) $\Leftrightarrow x=z=0$.

Ta cũng có $x=z=0$ thỏa mãn pt (2).

Suy ra hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2018}+|z|=\sqrt{2018}\\ |x|\sqrt{z^2+1}=\sqrt{2018-x^2}-\sqrt{2018}\end{cases}$ có nghiệm duy nhất $x=z=0$.

Vậy hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2018}+|y+1|=m\\ |x|\sqrt{y^2+2y+2018}=\sqrt{2018-x^2}-m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow m=\sqrt{2018}\in(0;50)$.

Email: kimlinhlqD@gmAil.Com

Câu 19. Tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0(1)\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0(2)\end{cases},\ (x,\ y\in\mathbb{R})$$

có nghiệm là :

A. $m\in[-2;2]$.

B. $m\in[-1;1]$.

C. $m\in[-1;2]$.

D. $m\in[1;2]$.

Lời giải

Tác giả : Huỳnh Kim Linh,Tên FB: Huỳnh Kim Linh

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 2y-y^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}$

Biến đổi pt (1) thành :

$$x^3-3x=(y-1)^3-3(y-1)\Leftrightarrow x^3-(y-1)^3-3(x-y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y+1)\left[x^2+x(y-1)+(y-1)^2-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-y+1)=0\\ x^2+x(y-1)+(y-1)^2-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow y=x+1$$

Do

$$\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow x^2\le 1;\ x\left(y-1\right)\le 1;\ \left(y-1\right)^2\le 1$$

Nên

$$x^2+x\left(y-1\right)+\left(y-1\right)^2-3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1\\ x\left(y-1\right)=1\\ \left(y-1\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

Thay $y=x+1$ vào (2) ta được $x^2-2\sqrt{1-x^2}+m=0$ Đặt $v=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow v\in\left[0;1\right]\Rightarrow$ (2) trở thành: $v^2+2v-1=m\left(*\right)$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trong đoạn $\left[0;1\right]$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ trên $\left[0;1\right]$

v	0	1
g(v)		2
	1 ↗	

Tìm được : $\min\limits_{[0;1]} g\left(v\right)=-1;\quad \max\limits_{[0;1]} g\left(v\right)=2.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left[-1;2\right]$.

Email:damvanthuong1205@gmail.com

Câu 20. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+3}-3\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-3\sqrt{x} & (1)\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=m-2\sqrt{1-y^2} & (2)\end{cases}$ (m là tham số).

Số các giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình trên có nghiệm là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tác giả :Đàm Văn Thượng,Tên FB: Thượng Đàm

Chọn D

Cách 1: Phương pháp lớp 10

+ Đk: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$

+ Với $x = y = 0$ hpt có nghiệm $\Leftrightarrow 2 = m - 2 \Leftrightarrow m = 4$

+ Với $x; y$ thỏa mãn điều kiện và không đồng thời bằng không.Ta có pt

$$\sqrt{x^2+3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{y^2+3} - 3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{y^2+3} + 3\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{y^2+3}} + 3\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}} + \frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ , do } \frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}} + \frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > 0$$

+ Với $x = y$ thế vào phương trình(2) ta được: $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = m - 2\sqrt{1-x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x^2} - m = 0 \ (*)$$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$

Vì $0 \le x; y \le 1$ nên $0 \le t^2 - 2 \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \le t \le 2$

Khi đó pt (*) trở thành: $t^2 + t - 2 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = m$ (**)

Xét hàm số $y = t^2 + t - 2 \ ; t \in \left[\sqrt{2}; 2\right]$ ta có hàm số đồng biến trên $\left[\sqrt{2}; 2\right]$

Nên phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow y(\sqrt{2}) \le m \le y(2) \Leftrightarrow \sqrt{2} \le m \le 4$

Vậy hpt có nghiệm khi $\sqrt{2} \le m \le 4$

Suy ra số giá trị nguyên của m là 3.

Cách 2: Phương pháp lớp 12.

+ Điều kiện: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$

+ Với $x = y = 0$ hpt có nghiệm $\Leftrightarrow 2 = m - 2 \Leftrightarrow m = 4$

+ Với $x; y$ thỏa mãn điều kiện và không đồng thời bằng không.Ta có phương trình

$\sqrt{x^2+3}-3\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}+3\sqrt{x}=\sqrt{y^2+3}+3\sqrt{y}\,(*)$

Xét hàm $f(t)=\sqrt{t^2+3}+3\sqrt{t}, 0<t\le 1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}>0, \forall t\in(0;1]$.

Từ $(*)$ suy ra $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

+ Với $x=y$ thế vào phương trình(2) ta được: $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=m-2\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}-m=0\ (*)$

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2}$

Vì $0\le x;y\le 1$ nên $0\le t^2-2\le 2\Leftrightarrow \sqrt{2}\le t\le 2$

Khi đó pt (*) trở thành: $t^2+t-2-m=0\Leftrightarrow t^2+t-2=m$ (**)

Xét hàm số $y=t^2+t-2\ ;t\in\left[\sqrt{2};2\right]$ ta có hàm số đồng biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$

Nên phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow y(\sqrt{2})\le m\le y(2)\Leftrightarrow \sqrt{2}\le m\le 4$

Vậy hpt có nghiệm khi $\sqrt{2}\le m\le 4$

Suy ra số giá trị nguyên của m là 3.

Email: quocdai1987@gmail.com

Câu 21. Cho hệ phương trình hai ẩn $x;y$ với tham số m $\begin{cases}x=\sqrt{4-y^2}\\x+y=m\end{cases}$. Có tất cả giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình đó có đúng hai nghiệm phân biệt.

A.5 ***B.1*** ***C.3*** ***D.2***

Lời giải

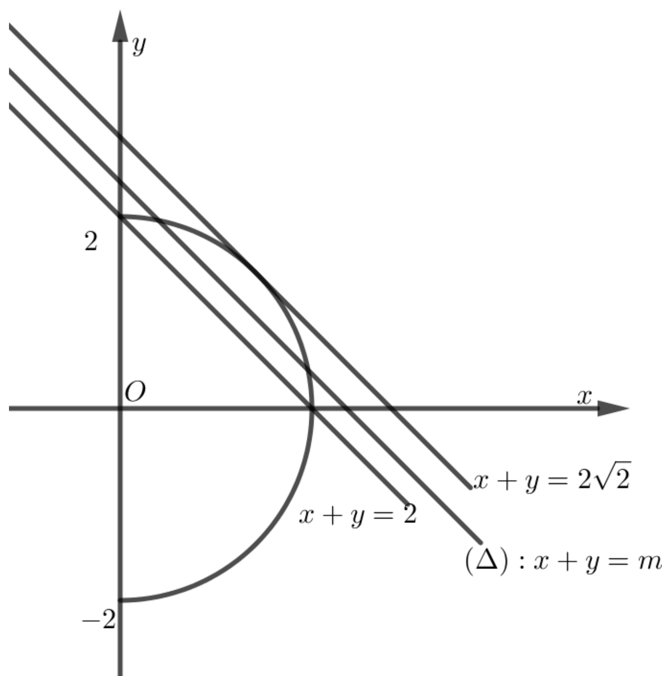
Tác giả : Trần Quốc Đại,Tên FB: www.facebook.com/tqd1671987

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\-2\le y\le 4\end{cases}$

$\begin{cases}x=\sqrt{4-y^2}\\x+y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\,(1)\\x+y-m=0\,(2)\end{cases}$

Từ điều kiện kết hợp pt(1) ta suy ra đồ thị của phương trình (1) : là nữa đường tròn có tâm $O(0;0); R=2$



Đồ thị pt(2) là đường thẳng luôn song song đường thẳng $x+y=0$

Dựa vào đồ thị, đường thẳng $\Delta: x+y=m$ cắt nữa đường tròn trên hình tại đúng hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $2 \le m < 2\sqrt{2}$

Câu 22. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} y=\sqrt{27+6x-x^2}+5 \\ my+2x+3m-6=0 \end{cases}$

Biết tập hợp tất cả các giá trị m là [a;b] thì hệ phương trình có nghiệm. Tính tổng $a^2+b^2=?$

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{9}{8}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** 0

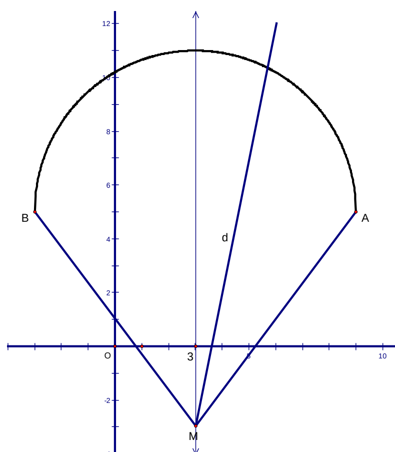
Tác giả: Trần Phương

FB: Phuong tran

l

Lời giải

Chọn A



+) PT(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 5 \\ (y-5)^2 + (x-3)^2 = 36 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm (x;y) thỏa mãn phương trình (1) là nửa đường tròn tâm I(3;5), bán kính R=6, đường kính AB với A(9;5), B(-3;5) và $y \ge 5$

+) PT(2) là phương trình của họ đường thẳng d: $my + 2x + 3m - 6 = 0$ luôn đi qua điểm M(3;-3)

TH1: $m = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 11$ hệ có nghiệm (3;11)

TH2: $m \ne 0 \Rightarrow d: y = \dfrac{-2}{m}x - 3 + \dfrac{6}{m}$ có hệ số góc $k = \dfrac{-2}{m}$

Đường thẳng MB, MA lần lượt có hệ số góc $k_1 = \dfrac{-4}{3}, k_2 = \dfrac{4}{3}$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng d cắt nửa đường tròn đường kính AB

$\Leftrightarrow$ d nằm trong góc (MA,MB)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-2}{m} \ge \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{-2}{m} \le \dfrac{-4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$$

Từ hai trường hợp trên suy ra $m \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \Rightarrow a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$

Gmail: linhphuongtran79@gmail.com

Email: lecamhoa474@gmail.com

Câu 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{(x^2-5x)^2 + 8x^2 - 40x + 16} - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 \\ x^2 - 2(m-1)x + m(m-2) = 0. \end{cases}$

. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả *: Lê Cẩm Hoa,Tên FB:*Élie Cartan Cartan

Chọn D

Cách 1: Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0 & (1) \\ x^2-2(m-1)x+m(m-2)=0 & (2) \end{cases}.$$

+ Giải (1): Phương trình (1) tương đương $|x^2-5x+4|+(x^2-5x+4)+10x(|x|-x)=0$ (3).

Với $0 \le x < 1$ hoặc $x > 4$, $\text{VT} > 0 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Với $1 \le x \le 4$, $\text{VT} = 0 \Rightarrow (3)$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [1;4]$.

Với $x < 0, (3) \Leftrightarrow 18x^2+10x-8=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy (1) có nghiệm là $x=-1$ hoặc $1 \le x \le 4$.

+ Giải (2) : Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - m(m-2) = 1 > 0, \forall m$

Suy ra (2) luôn có nghiệm $x_1 = m; x_2 = m-2$.

Ta đi xét các khả năng để hệ có nghiệm duy nhất (với nhận xét x_1 và x_2 hơn nhau 2 đơn vị)

$$\left[\begin{array}{l} 2 < m-2 \le 4 \\ -1 < m-2 < 1 \\ m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < m \le 6 \\ 1 < m < 3 \\ m=-1 \end{array}\right..$$

Vậy với $m \in (1;3) \cup (4;6] \cup \{-1\}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Mà $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{2;5;6;-1\}$. Chọn đáp án **D.**

Chú ý : *Nếu bạn đọc không trực quan được trong bước lập luận trên, tốt nhất hãy vẽ trục số biểu diễn tập* $x=-1, 1 \le x \le 4$ *và di chuyển đoạn* $[m-2;m]$ *trên đó.*

Cách 2 : *Dùng phương pháp đồ thị trên hệ tọa độ Oxy.*

Email: duyhung2501@gmail.com

Câu 24. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)^2 - y^2 = 4\left(\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{y^2+4}\right) & (1) \\ |x+1| - |y| + m = x^2 - 4x + 3 & (2) \end{cases}$

Tìm số giá trị nguyên của $m \in [-20;20]$ để hệ đã cho có nghiệm.

A.. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

Tác giả :Tăng Duy Hùng,Tên FB:Hùng Tăng

Lời giải

Chọn C

pt(1) $\Leftrightarrow x^2+2x+5-4\sqrt{x^2+2x+5}=y^2+4-4\sqrt{y^2+4}$ (*)

Xét $f(t)=t^2-4t$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Vì $x^2+2x+5\ge 4; y^2+4\ge 4$ Nên (*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)=f\left(\sqrt{y^2+4}\right) \Leftrightarrow (x+1)^2=y^2 \Leftrightarrow |x+1|=|y|$

Thế vào (2) ta được: $x^2-4x+3=m$ (**)

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge -1$

Mà $m\in[-20;20]$ nên có 22 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán

***Email:* anhtu82t@gmail.com**

Câu 25. Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3}=27\\ m\sqrt{x}=2x+3\end{cases}$$

. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $m_0\in(4;5)$. **B.** $m_0\in(6;7)$. **C.** $m_0\in(7;8)$. **D.** $m_0\in(9;10)$.

Lời giải

Tác giả : Đồng Anh Tú,Tên FB: Anh Tú

Chọn B

$$\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3}=27 \quad (1)\\ m\sqrt{x}=2x+3 \quad (2)\end{cases}$$

. ĐK $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{\frac{x+y}{2}}, b=\sqrt{\frac{x-y}{2}}$ thì $a,b\ge 0$. Từ PT (1), ta được $x=a^2+b^2$ và $a^3+b^3=27$

Nên $\begin{cases}0\le a\le 3\\0\le b\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3\le 3a^2\\b^3\le 3b^2\end{cases}\Rightarrow 3(a^2+b^2)\ge a^3+b^3=27\Rightarrow x=a^2+b^2\ge 9$. Vậy $x\ge 9$ dấu bằng xẫy ra khi $y=\pm 9$. Với $x\ge 9$ thì

Từ PT(2), ta có $m=2\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}=(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}})+\sqrt{x}\ge 2\sqrt{3}+3$ nên $m_0=2\sqrt{3}+3\approx 6,46$ nên **Chọn B**

Nhận xét

Để chứng minh $x\ge 9$, ta có thể làm cách khác như sau

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}},(t>0)$, *ta tìm được* $x=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{18}{t}$. *Nên ta có*

$x=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{18}{t}=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{9}{t}+\dfrac{9}{t}\ge 9$

Email: Cvtung.lg2@BACgiAng.eDu.vn

Câu 26. Cho hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2y^2+(1-m)\sqrt{1-x}+3m^2-2m}=y+m\\2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y\end{cases}$, m là tham số thự**C.** Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên để hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $2y-x\le 2023$.

A. 22. **B.** 45. **C.** 20. **D.** 35.

Lời giải

Tác giả : Cao Văn Tùng,Tên FB: Cao Tung

Chọn A

+) Xét phương trình $2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y,\ (2)$ đặt $a=\sqrt{1-x}\ge 0$ khi đó $x=1-a^2$ phương trình trở thành $2y^3+2\left(1-a^2\right)a=3a-y\Leftrightarrow(y-a)\left(2y^2+2ay+2a^2+1\right)=0$

$\Leftrightarrow y=a$ do $2y^2+2ay+2a^2+1=a^2+y^2+(a+y)^2+1>0$.

+) Với $y=a$ ta có $y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\x=1-y^2\end{cases}$.

+) Từ đó $\begin{cases}2y-x\le 2023\\y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+1)^2\le 45^2\\y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-46\le y\le 44\\y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le y\le 44$

+) Lấy $y=\sqrt{1-x}$ thay vào phương trình đầu ta được $\sqrt{2y^2+(1-m)y+3m^2-2m}=y+m,\ (1)$

$$\sqrt{2y^2+(1-m)y+3m^2-2m}=y+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+(1-m)y+3m^2-2m=(y+m)^2 \\ y\ge -m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(1-3m)y+2m^2-2m=0 \\ y\ge -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2m \\ y=m-1,\ (3) \end{array}\right. \\ y\ge -m \end{cases}$$

+) Để hệ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì (3) phải có hai nghiệm y phân biệt thuộc $[0;44]$ điều kiện là:

$$\begin{cases} 0\le 2m\le 44 \\ 0\le m-1\le 44 \\ 2m\ge -m \\ m-1\ge -m \\ 2m\ne m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le m\le 22 \\ 1\le m\le 45 \\ m\ge \dfrac{1}{2} \\ m\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le m\le 22$$, m nguyên nên có 22 giá trị m thỏa mãn.

Email: trungthuong2009@gmail.com

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^2-xy-2x+y+1=\sqrt{y+1}-\sqrt{x} \\ \sqrt{2x^2-(6-m)y}=y+1+\sqrt{x-1} \end{cases}$$

A. 1. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Tác giả : Phạm Thành Trung,Tên FB: Phạm Thành Trung

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge -1 \\ 2x^2-(6-m)y\ge 0 \end{cases}$

Xét phương trình: $x^2-xy-2x+y+1=\sqrt{y+1}-\sqrt{x}(*)$

Nếu $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ đưa phương trình thứ 2 trong hệ về dạng $\sqrt{6-m}=0 \Leftrightarrow m=6$

Nếu $\sqrt{x}+\sqrt{y+1}>0$, biến đổi phương trình về dạng $(x-y-1)(x-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}})=0$

Từ điều kiện xác định của bài toán ta có $x-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}>0$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1$

Thay vào phương trình còn lại trong hệ có:

$\sqrt{2x^2-(6-m)(x-1)+m}=x+\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\sqrt{2(x-1)^2-(2-m)(x-1)+2}=x-1+1+\sqrt{x-1}$

Do $x=1$ không là nghiệm phương trình nên chia hai vế cho $\sqrt{x-1}>0$ ta có:

$\sqrt{2\left[(x-1)+\dfrac{1}{(x-1)}\right]-2+m}=1+\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}(t\ge 2)$ khi đó có $(x-1)+\dfrac{1}{(x-1)}=t^2-2$

Vậy phương trình có dạng: $\sqrt{2(t^2-2)-2+m}=1+t\Leftrightarrow m=-t^2+2t+7$

Xét hàm số $g(t)=-t^2+2t+7(t\ge 2)$ ta có $g'(t)=-2t+2<0\forall t\ge 2$

Do đó phương trình có nghiệm khi $m\le g(2)=7$

Vậy có 7 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với học sinh lớp 10 ta có thể xét theo đồ thị của $(P): y=-t^2+2t+7, t\ge 2$ ta có bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
y	7	↘	$-\infty$

Với bảng biến thiên trên ta suy ra được yêu cầu bài toán.

***Email:* soantailieutoanhoc2018@gmail.com**

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(0;2019)$ để hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{m-y^2}+y\sqrt{m-x^2}=m\\2x-y=3\end{cases}$ có nghiệm thực.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2016. **D.** 2017.

Lời giải

Tác giả: Trần Ngọc,Tên FB: Trần Minh Ngọc

Chọn C

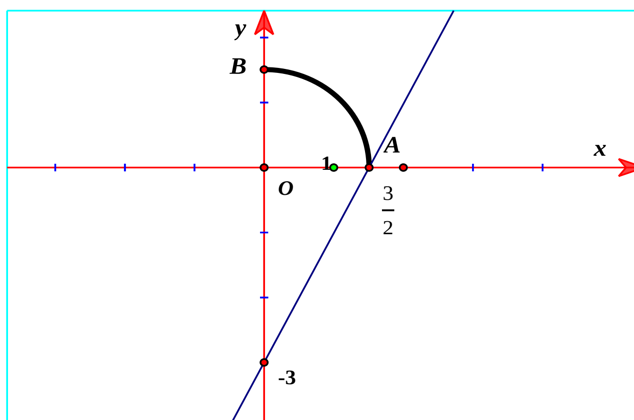
Điều kiện $\begin{cases}x^2\le m\\y^2\le m\end{cases}$.

Phương trình $x\sqrt{m-y^2}+y\sqrt{m-x^2}=m\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{m-y^2}\right)^2+\left(y-\sqrt{m-x^2}\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{m-y^2} \\ y=\sqrt{m-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x^2+y^2=m \end{cases} ,(1)$$

Phương trình $x^2+y^2=m\ (m>0)$, là phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{m}$

Suy ra (1) biễu diễn trên hệ trục toạ độ Oxy, là dây cung AB như hình vẽ.



Để hệ có nghiệm thì đường thẳng $2x-y=3$ cắt dây cung $AB \Leftrightarrow \sqrt{m}\ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow m\ge \frac{9}{4} \Rightarrow m\in\{3;4;5;.....2018\}$.

Email:datltt09@gmai.com

Câu 29. Biết tập tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=3m \\ x+y=4m \end{cases}$ có nghiệm là đoạn $\left[\frac{a+\sqrt{b}}{c};\frac{2a+\sqrt{d}}{c}\right]$ với a,b,c,d là các số tự nhiên và phân số $\frac{a}{c}$ tối giản .Tính $P=a+b+c+d$?

A. 60. **B.** 58. **C.** 61. **D.** 62.

Lời giải

Tác giả : Vũ Thị Hằng,Tên FB: Đạt Lâm Huy

NHẬN XÉT : Bài toán 29 dạng toán tương tự bài toán 5 và bài toán 7

Chọn B

ĐKXĐ $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge -2 \end{cases}$.Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x-1}, u\ge 0 \\ v=\sqrt{y+2}, v\ge 0 \end{cases}$ hệ trở thành $\begin{cases} u+v=3m \\ u^2+v^2=4m+1 \end{cases}$ (1)

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3m\\ uv=\dfrac{u^2+v^2-(4m+1)}{2}=\dfrac{9m^2-4m-1}{2}\end{cases}$ **.Suy ra *u;v* là nghiệm của phương trình**

$X^2-3mX+\dfrac{9m^2-4m-1}{2}=0(2)$ **.Do đó hệ đã cho có nghiệm khi (2) có 2 nghiệm không âm.Khi :**

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ u+v\ge 0\\ u.v\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m^2\ge 2(9m^2-4m-1)\\ 3m\ge 0\\ \dfrac{9m^2-4m-1}{2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\ 9m^2-4m-1\ge 0\\ 9m^2-8m-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{2+\sqrt{13}}{9}\le m\le\frac{4+\sqrt{34}}{9}$$

$\Rightarrow a=2,b=13,c=9,d=34\Rightarrow P=58.$

Email:datltt09@gmail.com

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{y+2}=\dfrac{5m^2+15m+10}{2(5m+1)}\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=\dfrac{5m^2+7m-6}{2(5m+1)}\end{cases}$$ có nghiệm?

A. 20. **B.** 15. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Tác giả : Vũ Thị Hằng,Tên FB: Đạt Lâm Huy

Chọn B

ĐKXĐ $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 2\end{cases}$ .Cộng và trừ tương ứng hai vế của hai phương trình trong hệ ta được

$$\begin{cases}(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2})=\dfrac{10m^2+22m+4}{2(5m+1)}\\ (\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+2}-\sqrt{y-2})=\dfrac{8m+16}{2(5m+1)}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2})=m+2\\ \dfrac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{4}{\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}}=\dfrac{8m+16}{2(5m+1)}\end{cases}(1)$ **.Đặt** $\begin{cases}a=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\Rightarrow a\ge 2\forall x\ge 1\\ b=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}\Rightarrow b\ge 2\forall y\ge 2\end{cases}$

(1) trở thành $\begin{cases}a+b=m+2\\ \dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{4(m+2)}{5m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=m+2\\ \dfrac{4(a+b)}{a.b}=\dfrac{4(m+2)}{5m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=m+2\\ a.b=5m+1\end{cases}(2)$

Hệ đã cho có nghiệm khi hệ (2) có nghiệm a,b thỏa mãn $a\ge 2,b\ge 2$,suy ra

$$\begin{cases}(a-2)+(b-2)\ge 0\\(a-2)(b-2)\ge 0\\(a+b)^2\ge 4a.b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)-4\ge 0\\(5m+1)-2(m+2)+4\ge 0\\(m+2)^2\ge 4(5m+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 2\\3m\ge -1\\m^2-16m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 16$$

Vậy $m\in\{16,17,18,19,20\}$.**Chọn D**

Email: thongqna@gmail.com

Câu 31. Biết rằng hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1)\\(x+1)(y+\sqrt{xy}+x-x^2)=4 & (2)\end{cases}$ nhận cặp số thực $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ là nghiệm. Tính giá trị biểu thức $P=y_1x_2$.

A. 1 . **B.** $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải

Tác giả : Trần Văn Thông,Tên FB: Trần Thông

Chọn D

Điều kiện : $\begin{cases}x;y\ge 0\\xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)\ge 0\end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}-y+(\sqrt{x}-\sqrt{y})=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)(y+\sqrt{xy}-2)}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0\ (3)$$

Từ PT (2) ta có $y+\sqrt{xy}=x^2-x+\frac{4}{x+1}=(x-1)^2+\left(x+1+\frac{4}{x+1}\right)-2\ge 2$

$$\Rightarrow\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)(\sqrt{xy}-2)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>0$$

PT (3) $\Leftrightarrow x=y$, thay vào PT (2) ta được : $x^3-2x^2-3x+4=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra hệ có nghiệm là $(1;1);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Do vậy, $P = y_1x_2\,\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Email: hmtuonguqn@gmail.com

Câu 32. Gọi $(x_0; y_0) = (a + b\sqrt{c}; d + e\sqrt{c})$ (với c là số nguyên tố)là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 + x(y^2+1) + 2y(x^2+1) = 0 & (1) \\ y^2 = (1-\sqrt{x+3y})(x+3y-2\sqrt{y}+2) & (2) \end{cases}.$$

Tính gía trị của biểu thức $P = a + b - e$.

A. $P = -16$. **B.** $P = -6\cdot$ **C.** $P = -2\cdot$ **D.** $P = 1$.

Lời giải

Tác giả : Hồ Minh TườngTên FB:Hồ Minh Tường

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x + 3y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Ta có (1) <=> $x^2(x+2y) + y^2(x+2y) + (x+2y) = 0$ <=> $(x+2y)(x^2+y^2+1) = 0$ <=> $\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ x = -2y \end{array}\right.$

* Xét $x^2 + y^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

* Xét $x = -2y$ thế vào (2) ta được $y^2 = (1-\sqrt{y})(y-2\sqrt{y}+2)$ <=> $\left(\dfrac{y}{1-\sqrt{y}}\right)^2 = \dfrac{y}{1-\sqrt{y}} + 2$

($y = 1$ không là nghiệm)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{y}{1-\sqrt{y}} = -1 \Leftrightarrow y - \sqrt{y} + 1 = 0 \text{ (vn)} \\ \dfrac{y}{1-\sqrt{y}} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y} = -1-\sqrt{3} \text{ (vn)} \\ \sqrt{y} = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 4 - 2\sqrt{3} \to x_0 = 4\sqrt{3} - 8 \to P = -2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Chọn C

Email: tuancaohoc17@gmail.com

Câu 33. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4-2x-3y^2} + x + y = 0 \\ \left(y^2+4y+7\right)\left(x^2+1\right) = -m^4 + 2m^2 + 3 \end{cases}$.

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hệ phương trình có nghiệm thực ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Tuấn,Tên FB: Nguyễn Tuấn

Chọn B

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4-2x-3y^2}+x+y=0 & (1) \\ (y^2+4y+7)(x^2+1)=-m^4+2m^2+3 & (2) \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \sqrt{4-2x-3y^2}=-(x+y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\le 0 \\ x^2+2(y+1)x+4y^2-4=0 \quad (3) \end{cases}$

Để tồn tại x trong phương trình (3) ta phải có $\Delta'_x=(y+1)^2-4y^2+4=-3y^2+2y+5\ge 0 \Leftrightarrow -1\le y\le \frac{5}{3}$.

Ta có $(2) \Leftrightarrow \left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right](x^2+1)=3-m^4+2m^2$

$\Leftrightarrow \left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right](x^2+1)=4-(m^2-1)^2 \quad (4)$

Với mọi $x,\ y$ thoả mãn: $y\in\left[-1;\frac{5}{3}\right]$, $x+y\le 0$ ta có:

VT(4)=$\left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right](x^2+1)\ge 4$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0, y=-1$

VP(4)$=4-(m^2-1)^2\le 4$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=\pm 1$

Do đó điều kiện cần để hệ có nghiệm thực là $m=\pm 1$.

Với $m=\pm 1$. Khi đó $(4)\Leftrightarrow \left[(y+1)^2+2(y+1)+4\right](x^2+1)=4 \Leftrightarrow x=0, y=-1$ (thỏa mãn (1)).

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m sao cho hệ phương trình có nghiệm thực.

Email:datltt09@gmail.com

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt{y+2}=\dfrac{5m^2+15m+10}{2(5m+1)} \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=\dfrac{5m^2+7m-6}{2(5m+1)} \end{cases}$$ có nghiệm?

A. 20. **B.** 15. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Tác giả : Vũ Thị Hằng,Tên FB: Đạt Lâm Huy

Chọn D

ĐKXĐ $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 2 \end{cases}$ .Cộng và trừ tương ứng hai vế của hai phương trình trong hệ ta được

$$\begin{cases} (\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2})=\dfrac{10m^2+22m+4}{2(5m+1)} \\ (\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+2}-\sqrt{y-2})=\dfrac{8m+16}{2(5m+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2})=m+2 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{4}{\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}}=\dfrac{8m+16}{2(5m+1)} \end{cases} (1)$$.**Đặt** $\begin{cases} a=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1} \Rightarrow a \ge 2 \forall x \ge 1 \\ b=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2} \Rightarrow b \ge 2 \forall y \ge 2 \end{cases}$

(1) trở thành $\begin{cases} a+b=m+2 \\ \dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{4(m+2)}{5m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=m+2 \\ \dfrac{4(a+b)}{a.b}=\dfrac{4(m+2)}{5m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=m+2 \\ a.b=5m+1 \end{cases} (2)$

Hệ đã cho có nghiệm khi hệ (2) có nghiệm a,b thỏa mãn $a \ge 2, b \ge 2$,suy ra

$$\begin{cases} (a-2)+(b-2) \ge 0 \\ (a-2)(b-2) \ge 0 \\ (a+b)^2 \ge 4a.b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)-4 \ge 0 \\ (5m+1)-2(m+2)+4 \ge 0 \\ (m+2)^2 \ge 4(5m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ 3m \ge -1 \\ m^2-16m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 16$$

Vậy $m \in \{16,17,18,19,20\}$.**Chọn D**

***Email:* <u>thuhAngnvx@gmAil.Com</u>**

Câu 35. Tổng các giá trịnguyên của m để hệ phương trình sau có 2 phân biệt nghiệm là:

$$\begin{cases} x^3+3x-y^3+3y^2-6y+4=0 & (1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0 & (2) \end{cases}$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải

Tác giả : Phùng Thị Thu Hằng,Tên FB: Phùng Hằng

Chọn A

Cách 1 (Lớp 10)

Điều kiện: $-1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2$

$(1) \Leftrightarrow x^3+3x=(y-1)^3+3(y-1)$

$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(x^2+x(y-1)+(y-1)^2\right)+3(x-y+1)=0 \Leftrightarrow (x-y+1)\left[\left(x^2+x(y-1)+(y-1)^2\right)+3\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ \left(x^2+x(y-1)+(y-1)^2\right)+3=0\ (VN) \end{array}\right.$

Thế $y=x+1$ vào pt (2) ta được: $x^2-2\sqrt{1-x^2}=-m$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$ $(t\in[0;1])$

PT $\Leftrightarrow 1-t^2-2t=-m \Leftrightarrow t^2+2t-1=m\ (3)$

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t-1$

BBT

t	0	1
$f(t)$	-1 ↗	2

Với mỗi nghiệm $t\in[0;1)$ cho 2 nghiệm $x\in[-1;1]$ nên để hệ phương trình có nghiệm 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (3) có 1 nghiệm $t\in[0;1) \Leftrightarrow -1\le m<2$ do $m\in Z \Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$ **Chọn A**

Cách 2 (Lớp 12)

Điều kiện: $-1\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2$

$(1)\Leftrightarrow x^3+3x=(y-1)^3+3(y-1)\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t \Rightarrow f'(t)=3t^2+3>0\ \forall t\in[-1;1]$

Khi đó từ $(*) \Leftrightarrow x=y-1 \Leftrightarrow y=x+1$

Thế $y=x+1$ vào pt (2) ta được: $x^2-2\sqrt{1-x^2}=-m\ (3)$

Xét hàm số $g(x)=x^2-2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow g'(x)=2x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

BBT

x	-1	0	1

$g'(x)$		-	+
$g(x)$	1 ↘	-2	↗ 1

Để hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (3) có 2 nghiệm phân biệt $x \in [-1;1] \Leftrightarrow$

$-2 < -m \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m < 2$ do $m \in Z \Rightarrow m \in \{-1;0;1\}$ **Chọn A**

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình:

$\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 = 16 \quad (1) \\ 5\sqrt{4y - y^2} = 4x^2 + 2\sqrt{4 - x^2} + m \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm. Số phần tử của S là

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \in [-2;2] \\ y \in [0;4] \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x^3 - 12x = (y-2)^3 - 12(y-2)$. Với $y \in [0;4] \Leftrightarrow y - 2 \in [-2;2]$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 12t$ $(t \in [-2;2])$ có $f'(t) = 3t^2 - 12 < 0 \quad \forall t \in [-2;2]$

Nên hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[-2;2]$ mà $f(x) = f(y-2) \Leftrightarrow x = y - 2$

Thay vào (2) ta được: $3\sqrt{4 - x^2} - 4x^2 = m$

Khảo sát hàm $g(x) = 3\sqrt{4 - x^2} - 4x^2$ $(x \in [-2;2])$ ta được $\min_{[-2;2]} g(x) = g(2) = g(-2) = -16$

và $\max_{[-2;2]} g(x) = g(0) = 6$. Nên để hệ phương trình có nghiệm thì $m \in [-16;6]$

Suy ra số phần tử của S là: 23

Tác giả: Bùi Chí Thanh **Tên Facebook: Thanhbui**

Lê –Thị-Thúy_thuytoanqx2@gmail.com

Câu 37. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + y - 4x - 3 = 0 \\ 16x^2 + 10\sqrt{1-x^2} + 14\sqrt{2y - y^2} + m = 0 \end{cases}$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có 2 nghiệm. Số phần tử của S.

A. 8 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

Chọn C

ĐK: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

PT (1): $x^3 - y^3 + 3y^2 + y - 4x - 3 = 0$

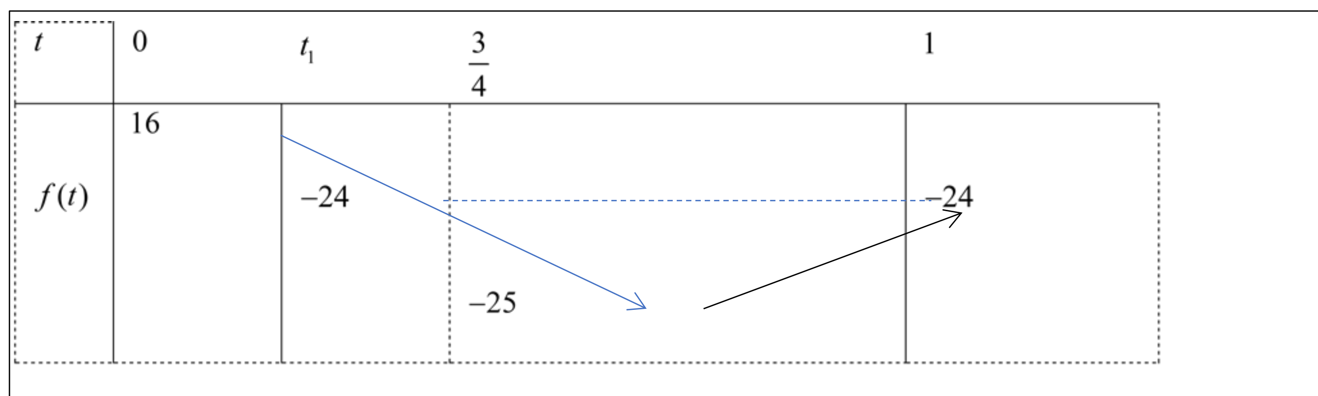
$\Leftrightarrow (x+1-y)\left(x^2 + x(y-1) + (y-1)^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+1-y=0 & (a) \\ x^2 + x(y-1) + (y-1)^2 = 4 & (b) \end{array}\right.$

Do điều kiện $x \in [-1;1]$, $y \in [0;2]$ nên PT(b) vô nghiệm

Thay $y = x+1$ vào phương trình (2) ta được $16(1-x^2) - 24\sqrt{1-x^2} - 16 = m$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t \in [0;1]$ Với $t_0 = 1 \Rightarrow x = 0$; $t_0 \in [0;1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{1-t_0^2} \\ x_2 = -\sqrt{1-t_0^2} \end{array}\right.$ $x_1 \ne x_2$

Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 24t - 16$ $t \in [0;1]$



-25

$-24;-16]$,

Email: phuongthu081980@gmAil.Com

Câu 38. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^2 + mxy + y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 185 \quad (1) \\ \left(x^2 - mxy + y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 65 \quad (2) \end{cases}$. Tìm số các giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ để hệ phương trình có nghiệm là.

A. 2018 **B.** 4037 . **C.** 4036 . **D.** 2019 .

Lời giải

Chọn C

Cộng từng vế 2 pt ta được: $2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=250 \Leftrightarrow x^2+y^2=25$

Thay vào hệ ban đầu ta có hpt:

$$\begin{cases}(25+mxy).5=185\\(25-mxy).5=65\end{cases} \Rightarrow xy=\frac{12}{m} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2=25\\xy=\frac{12}{m}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-2xy=25\\xy=\frac{12}{m}\end{cases} (*) \Rightarrow$$

Đặt $S=x+y;P=xy$. Thay vào hệ trên ta có $S^2-2.\frac{12}{m}=25 \Leftrightarrow S^2\ge 0 \Leftrightarrow S\ge\frac{25m+24}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le-\frac{24}{25}(*_1)\\m>0\end{array}\right.$

Hệ (*) có nghiệm $S^2\ge 4P \Leftrightarrow \frac{25m+24}{m}\ge 4.\frac{12}{m} \Leftrightarrow \frac{25m-24}{m}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<0\\m\ge\frac{24}{25}(*_2)\end{array}\right.$

Từ $(*_1);(*_2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m\le-\frac{24}{25}\\m\ge\frac{24}{25}\end{array}\right.$ Theo gt: $m\in[-2018;2018];m\in Z \Rightarrow$ có 4036 số . **Chọn C**

Họ tên: Nguyễn Thị Phương DungEmail: phDungsn@gmAil.Com

FB : Phương Dung

Câu 39. Tìm số giá trị nguyên của m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2} & (1)\\x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=m & (2)\end{cases}.$$

A. 8 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\y\ge -1\end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2=x+2y+1+2\sqrt{(x-1)(2y+2)}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2=x+2y+1+2\sqrt{(2x-2)(y+1)}$$
$$\overset{\text{Cosi}}{\le} x+2y+1+(2x-2)+(y+1)=3(x+y)$$

$\Rightarrow 0\le x+y\le 3$

$(2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)} = m$

Đặt $x + y = t$

Ta có $m = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$, $t \in [0;3]$

$f'(t) = 2t + 2 - \dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - 7t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 - 2\sqrt{2} \\ t = 1 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Xét dau suy ra trên $[0;3]$ hàm $f(t)$ đồng biến

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;3]} = f(0) = 18, \max\limits_{x\in[0;3]} = f(3) = 25$

Hệ phương trình có nghiệm khi $m \in [18;25]$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m.

VDC PT-HPT CHỨA CĂN

VẤN ĐỀ 3. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Mail: daytoan2018@gmail.com

Câu 1. Phương trình $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$ có tập nghiệm nghiệm $A=\{1;2;3\}$, phương trình $\sqrt{2.g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$ có tập nghiệm $B=\{0;3;4;5\}$ .Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)-1}+\sqrt{g(x)-1}+f(x)+g(x)=f(x).g(x)+1$ có bao nhiêu phần tử ?

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Tác giả :Vũ Ngọc Thành ,FB: Vũ Ngọc Thành

Chọn A

□ $\sqrt{2-f(x)}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f^2(x)+f(x)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$

□ $\sqrt{2\cdot g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(2g(x)-1-2\sqrt{2g(x)-1}+1\right)+\frac{1}{3}\left(3g(x)-2-3\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{2g(x)-1}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2g(x)-1}-1=0\\ \sqrt[3]{3g(x)-2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow g(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=4\\x=5\end{array}\right.$$

□ $\sqrt{f(x)-1}+\sqrt{g(x)-1}+f(x)+g(x)=f(x).g(x)+1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{f(x)-1}+\sqrt{g(x)-1}=\left[1-f(x)\right]\left[1-g(x)\right]$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=1\\ g(x)=1\end{cases}\Rightarrow x=1$ .Vậy tập nghiệm của phương trình có 1 phần tử.

Mail: daytoan2018@gmail.com

Câu 2. Phương trình $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$ có tập nghiệm nghiệm $A=\{1;2;3\}$, phương trình $\sqrt{2.g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$ có tập nghiệm $B=\{0;3;4;5\}$ .Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x).g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ có bao nhiêu phần tử ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Tác giả :Vũ Ngọc Thành ,FB: Vũ Ngọc Thành

Chọn C

□ $\sqrt{2-f(x)}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ f^2(x)+f(x)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$

□ $\sqrt{2\cdot g(x)-1}+\sqrt[3]{3.g(x)-2}=2.g(x)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(2g(x)-1-2\sqrt{2g(x)-1}+1\right)+\frac{1}{3}\left(3g(x)-2-3\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{2g(x)-1}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}+2\right)\left(\sqrt[3]{3g(x)-2}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2g(x)-1}-1=0\\ \sqrt[3]{3g(x)-2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow g(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=4\\x=5\end{array}\right.$

□ $\sqrt{f(x).g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{g(x)}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\g(x)=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=3\\x=4\\x=5\end{array}\right.$ .Vậy tập nghiệm của phương trình có 6 phần tử.

Mail: daytoan2018@gmail.com

Câu 3. Phương trình $f(x)=0$ có tập nghiệm $A=\{m;m^2;m^3\}$, phương trình $g(x)=0$ có tập nghiệm $B=\{2;m+2;4m\}$ .Hỏi có bao nhiêu giá trị m để hai phương trình tương tương ?

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Tác giả :Vũ Ngọc Thành ,FB: Vũ Ngọc Thành

Chọn A

Để hai phương trình tương đương thì $A=B$

Xét $m+m^2+m^3=2+m+2+4m \Leftrightarrow m^3+m^2-4m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$

Xét $m=2$ ta được $A=\{m;m^2;m^3\}=\{2;4;8\}, B=\{2;m+2;4m\}=\{2;4;8\}$

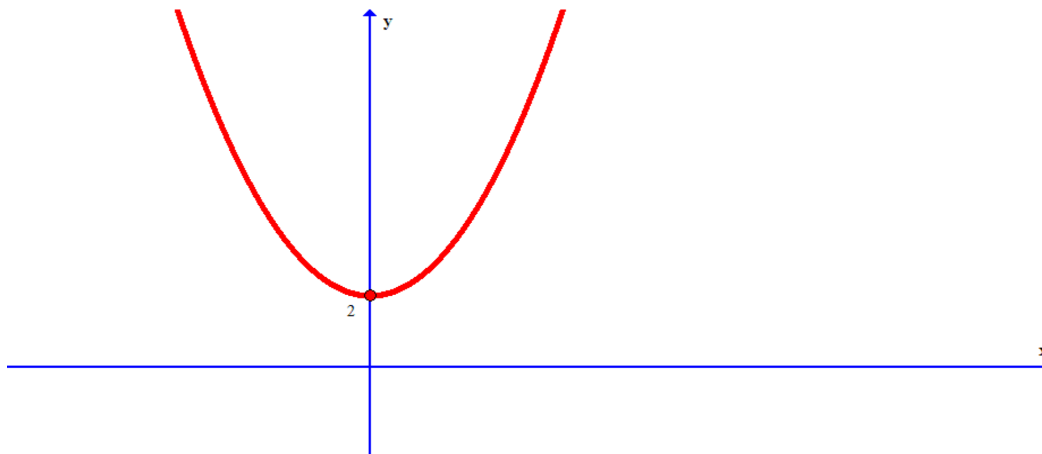
Xét $m=-2$ ta được $A=\{m;m^2;m^3\}=\{-2;4;-8\}, B=\{2;m+2;4m\}=\{2;0;-8\}$

Xét $m=-1$ ta được $A=\{m;m^2;m^3\}=\{-1;1;-1\}, B=\{2;m+2;4m\}=\{2;1;-4\}$

Vậy chỉ có 1 giá trị m thỏa mãn.

Mail: daytoan2018@gmail.com

Câu 4. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



.Hỏi có bao nhiêu giá trị tham số m để phương trình $f\left(x\right)=\sqrt[3]{3m.f\left(x\right)-2}$ và $m=\sqrt[3]{2m.f\left(x\right)-1}$ tương đương và tập nghiệm khác rỗng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tác giả :Vũ Ngọc Thành ,FB: Vũ Ngọc Thành

Chọn B

Xét hệ phương trình $\begin{cases} y=\sqrt[3]{3m.y-2}\ (1) \\ m=\sqrt[3]{2my-1}(2) \\ y\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3=3my-2\,(3) \\ m^3=2my-1\ (4) \\ y\ge 2 \end{cases}$ (*)

Nếu hai phương trình tương đương và tập nghiệm khác rỗng thì (*) có nghiệm

Lấy vế nhân với giữa hai phương trình (3) và (4) ta được $y^3m^3=(3my-2)(2my-1)$ (5)

Đặt $t=my$ .Khi đó (5) trở thành $t^3-6t^2+7t-2=0$

Giải phương trình này ta được $t=1;t=\frac{5+\sqrt{17}}{2};t=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

Với $t=1$ ta được $\begin{cases} y=1 \\ m=1 \end{cases}$ không thỏa mãn (*)

Với $t=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ thay vào (1) và (2) ta được $\begin{cases} y=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{17}+11}{2}}>2 \\ m=\sqrt[3]{\sqrt{17}+4} \\ ym=\frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ thỏa mãn (*)

Với $t=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ thay vào (1) và (2) ta được $\begin{cases} y=\sqrt[3]{\frac{-3\sqrt{17}+11}{2}} \\ m=\sqrt[3]{-\sqrt{17}+4} \end{cases}$ nhưng $ym\ne\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

Vậy có 1giá trị m thỏa mãn.

Email: thienhuongtth@gmail.com

Câu 5. Cho phương trình $27x^3+18x^2-9x+(27x^2+2x-1)\sqrt{2x-1}-125=0$. Giả sử nghiệm của phương trình có dạng $x=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Tính

$S=a+b+c$.

A. $S=46$. **B.** $S=47$. **C.** $S=48$. **D.** $S=49$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Thanh ,Tên FB: Thanh Văn Nguyễn

Chọn B

Ta có:

$$27x^3+18x^2-9x+\left(27x^2+2x-1\right)\sqrt{2x-1}-125=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-3x\right)^3=-125$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=3x-5$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{16+\sqrt{22}}{9}$$

Suy ra: $a=16, b=22, c=9$

Vậy $S=47$

Email: doanphunhu@gmail.com

Câu 6. Cho phương trình

$$8\underbrace{\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\cdots+\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}}}}}}_{2018\,can}=4x^3+5x^2+5x+1 \ (1)$$

Tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng

A. $\frac{25+8\sqrt{5}}{16}$. **B.** $\frac{25-8\sqrt{5}}{16}$. **C.** $\frac{49}{16}$. **D.** 3.

Lời giải

Tác giả :Đoàn Phú Như,Tên FB: Như Đoàn

Chọn B

Từ phương trình (1) suy ra $4x^3+5x^2+5x+1=(4x+1)\left(x^2+x+1\right)\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{4}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow 8\underbrace{\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\cdots+\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}}}}}}_{2018\,can}=4x^3+5x^2+5x+1$

$$\Leftrightarrow 8\underbrace{\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\sqrt{\cdots+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}}}}}_{2017\,can}=4x^3+5x^2+5x+1$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}=4x^3+5x^2+5x+1 \Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{4}\right)=(4x+1)(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow (4x+1)(x^2+x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{4} \\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$$

Do đó tổng bình phương các nghiệm bằng $\frac{25-8\sqrt{5}}{16}$

Email: builoiyka@gmail.com

Câu 7. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $27x^3-75x^2+8x+20+6(x+2)\sqrt{x+2}=0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng $\frac{a+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{18}$ $(a,b,c\in\mathbb{N})$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 272. **B.** 235. **C.** 1075. **D.** 1112.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện : $x\geq -2$.

$$27x^3-75x^2+8x+20+6(x+2)\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow (3x-2)(9x^2-19x-10)+6(x+2)\sqrt{x+2}=0.$$

Đặt $\begin{cases} u=3x-2 \\ v=\sqrt{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=9x^2-12x+4 \\ v^2=x+2 \end{cases} \Rightarrow u^2-7v^2=9x^2-19x-10$

Phương trình trở thành

$$u(u^2-7v^2)+6v^3=0 \Leftrightarrow u^3-7uv^2+6v^3=0 \Leftrightarrow u^3-uv^2-6uv^2+6v^3=0$$

$$\Leftrightarrow u(u^2-v^2)-6v^2(u-v)=0 \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv-6v^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u-2v)(u+3v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u=v & (1) \\ u=2v & (2) \\ u=-3v & (3) \end{array}\right..$$

$$(1) \Rightarrow 3x-2=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{2}{3} \\ 9x^2-13x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{13+\sqrt{97}}{18}.$$

$$(2)\Rightarrow 3x-2=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\9x^2-16x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

$$(3)\Rightarrow 3x-2=-3\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{2}{3}\\9x^2-21x-14=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{7-\sqrt{105}}{6}.$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{7-\sqrt{105}}{6};2;\dfrac{13+\sqrt{97}}{18}\right\}$.

Tổng các phần tử của S là $\dfrac{7-\sqrt{105}}{6}+2+\dfrac{13+\sqrt{97}}{18}=\dfrac{70+\sqrt{97}-\sqrt{945}}{18}$.

Suy ra $\begin{cases}a=70\\b=97\\c=945\end{cases}\Rightarrow a+b+c=1112$.

Tác giả : Bùi Thị LợiTên FB: LoiBui

Email: nvpmaster0808@gmail.com

Câu 8. Cho phương trình: $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$. Gọi S là tổng bình phương các nghiệm thực của phương trình. Tính S.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Phùng Tên FB: Phùng Nguyễn

Chọn C

Ta dự đoán được nghiệm $x=\pm1$, và ta viết lại phương trình như sau:

$$3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)=\left(\sqrt{x^2+15}-4\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2=1 & (1)\\ \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} & (2)\end{array}\right.$$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow x=\pm1$.

Giải phương trình (2). Vì $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}>0$;

$$\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8}\Rightarrow\sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x=1, x=-1$. Suy ra $S=1^2+(-1)^2=2$.

Gmail: tuonganh0209@gmail.com.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1}{x}-x}$ (1) có dạng $a+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a.b$.

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -4.

Tác giả: Nguyễn Ngọc Thảo –Tên FB: Nguyễn Ngọc Thảo.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $0<x\le 1$. Với điều kiện này khi đó

$$(1)\Leftrightarrow (x^3+x)\sqrt{\frac{1}{x}-x}=(x^2+x)^2+(x-1)^2$$

Do $(x^2+x)^2+(x-1)^2>0$ suy ra $x\sqrt{\frac{1}{x}-x}>0\Leftrightarrow 0<x<1$

Do đó pt ban đầu $\Leftrightarrow (x^2+1)^2-2(x-x^3)=(x^2+1)\sqrt{x-x^3}$.

Đặt $a=x^2+1; b=\sqrt{x-x^3}$ với $a>0; b\ge 0$.Khi đó pt ban đầu trở thành

$$a^2-ab-2b^2=0\Leftrightarrow (a+b)(a-2b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b\,(L) \\ a=2b \end{array}\right.$$

Với $a=2b\Rightarrow x^2+1=2\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=4x(1-x^2)$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+2x^2-4x+1=0\Leftrightarrow (x^2+2x-1)^2=0\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1+\sqrt{2}$

***Email:* Binhlt.thpttinhgiA1@thAnhhoA.eDu.vn**

Câu 10. Phương trình $\sqrt{2x-1+\sqrt{(5x+4)(x^2+2)-8}}-1=x$ có hai nghiệm $x=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\pm\sqrt{c+d\sqrt{b}}\right)$ với $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Giá trị $S=a+b+c+d$ bằng:

A. 56. **B.** 90. **C.** 85. **D.** 131.

Lời giải

Tác giả : Lê Thanh Bình,***Tên FB:*** Lê Thanh Bình

Chọn B

Ta có $\sqrt{2x-1+\sqrt{(5x+4)(x^2+2)-8}}-1=x \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 2x-1+\sqrt{(5x+4)(x^2+2)-8}=(x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \sqrt{(5x+4)(x^2+2)-8}=x^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ (5x+4)(x^2+2)-8=(x^2+2)^2 \ (1) \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow 5x(x^2+2)+4x^2=(x^2+2)^2 \quad (2)$

Hiển nhiên $x=0$ không thỏa mãn (2). Chia cả hai vế của (2) cho x^2 ta được

$5\left(\frac{x^2+2}{x}\right)+4=\left(\frac{x^2+2}{x}\right)^2 \quad (3)$

Đặt $t=\frac{x^2+2}{x}$. Ta có $t=\frac{x^2+2}{x} \Leftrightarrow x^2-tx+2=0 \quad (*)$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=t^2-8\ge 0 \Leftrightarrow |t|\ge 2\sqrt{2}$ (**).

Khi đó (3) trở thành $t^2-5t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{5+\sqrt{41}}{2} \text{(tháa m·n (**))} \\ t=\frac{5-\sqrt{41}}{2} \text{(kh«ng tháa m·n (**))} \end{array}\right.$

Với $t=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$ ta được phương trình $\Leftrightarrow 2x^2-\left(5+\sqrt{41}\right)x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\left(5+\sqrt{41}\pm\sqrt{34+10\sqrt{41}}\right)$

(thỏa mãn điều kiện $x\ge -1$)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\frac{1}{4}\left(5+\sqrt{41}\pm\sqrt{34+10\sqrt{41}}\right)$

Suy ra $a=5,\ b=41,\ c=34,\ d=10 \Rightarrow S=a+b+c+d=90$. Chọn B

Email: tDphuong.hss@hue.eDu.vn

Câu 11. Gọi $x=\frac{\pm a}{\sqrt{b}}$ $(a,b\in\mathbb{N}^*)$ là nghiệm của phương trình $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$. Tính a^2+b^2

A. 27. **B.** 9. **C.** 29. **D.** 7.

Lời giải

Họ và tên: Trần Đức PhươngTên FB: Phuong Tran Duc

Chọn C

Điều kiện : $-1 \le x \le 1$.

Bình phương hai vế đã cho ta được: $x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$.

Áp dụng bất đẳng thức **B.C.**S ta có:

$$\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=\left(\sqrt{13}.\sqrt{13\left(1-x^2\right)}+3\sqrt{3}.\sqrt{3+3x^2}\right)^2\le(13+27)\left(13-13x^2+3+3x^2\right)$$
$$=40\left(16-10x^2\right)$$

Mặt khác:

$$10x^2\left(16-10x^2\right)\le\frac{\left(10x^2+16-10x^2\right)^2}{4}=64$$

Do đó: $x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2\le 256$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2=\frac{4}{5}\Leftrightarrow x=\frac{\pm 2}{\sqrt{5}}$.

Vậy: $a=2;\ b=5$. Suy ra: $a^2+b^2=29$.

Email: thantaithanh@gmail.com

Câu 12. Biết rằng phương trình $x^3(x+4)+4x+\sqrt{x^2+2x+2020}=2\left(1009-3x^2\right)$ có một nghiệm dương duy nhất dạng $x=-a+\sqrt{\frac{-b+c\sqrt{d}}{e}}$ trong đó $a,\ b,\ d\in\mathbb{N}$, $c,\ e$ là các số nguyên tố. Khi đó $a+b+c+d+e$ bằng:

A. 901. **B.** 902 . **C.** 903. **D.** 904 .

Tác giả : Nguyễn Trung ThànhTên FB: https://www.facebook.com/thantaithanh

Lời giải

Chọn D

$$x^3(x+4)+4x+\sqrt{x^2+2x+2020}=2(1009-3x^2)$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^4+\sqrt{(x+1)^2+2019}=2019$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x+1)^2+\frac{1}{4}=(x+1)^2+2019-\sqrt{(x+1)^2+2019}+\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2+\frac{1}{2}\right]^2=\left[\sqrt{(x+1)^2+2019}-\frac{1}{2}\right]^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+\frac{1}{2}=\sqrt{(x+1)^2+2019}-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x+1)^2-2018=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{-1+3\sqrt{897}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{\dfrac{-1+3\sqrt{897}}{2}} \\ x=-1+\sqrt{\dfrac{-1+3\sqrt{897}}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy $a=1,\ b=1,\ c=3,\ d=897,\ e=2 \Rightarrow a+b+c+d+e=904.$

Email: lethuhAng2712@gmAil.Com

Email: thienhuongtth@gmail.com

Câu 13. Biết phương trình $4x=\sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+x}}}}$ có nghiệm dạng $x=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tổng $S=a+b+c$ có giá trị bằng:

A. 129186. **B.** 129168. **C.** 129618. **D.** 129681.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị ThuTên FB: Nguyễn Thị Thu

Chọn A

Từ phương trình suy ra $x>0$

Đặt $\frac{1}{4}\sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+x}}=u$, $u>0$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x=\sqrt{2018+\dfrac{1}{4}\sqrt{2018+u}} \\ 4u=\sqrt{2018+\dfrac{1}{4}\sqrt{2018+x}} \end{cases}$$

+ Nếu $x > u \Rightarrow \sqrt{2018+x} > \sqrt{2018+u} \Rightarrow \sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+x}} > \sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+u}}$

$\Rightarrow 4u > 4x \Rightarrow u > x$ (mâu thuẫn)

+ Nếu $x < u \Rightarrow \sqrt{2018+x} < \sqrt{2018+u} \Rightarrow \sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+x}} < \sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+u}}$

$\Rightarrow 4u > 4x \Rightarrow u > x$ (mâu thuẫn)

Vậy $x = u$. Ta có phương trình $4x = \sqrt{2018+\frac{1}{4}\sqrt{2018+x}}$

Đặt $v = \frac{1}{4}\sqrt{2018+x}$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} 4x = \sqrt{2018+v} \\ 4v = \sqrt{2018+x} \end{cases}$

Lập luận tương tự trên ta được $x = v$. Ta được phương trình

$$4x = \sqrt{2018+x} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 16x^2 - x - 2018 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{129153}}{32}$$

Suy ra $a = 1;\ b = 129153;\ c = 32$. Vậy $S = a+b+c = 129186$. Chọn A

Email: ntpAnh1079@tuyenquAng.eDu.vn

Câu 14. Biết nghiệm nhỏ nhất của phương trình $3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$ có dạng $\frac{a-\sqrt{c}}{b}$ $\left(a,b,c \in \mathbb{N}^*\right), \frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^3 + c^4$.

A. $S = 2428.$ **B.** $S = 2432.$ **C.** $S = 2418.$ **B.** $S = 2453.$

Họ tên tác giả: *Ngyễn Thị Phương AnhTên FB: Nguyễn Thị Phương Anh*

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$. Ta có hệ $\begin{cases} y^3 = \frac{16x^2+6x+2}{3} & (1) \\ y = \frac{3x^3-7x^2+6x+4}{3} & (2) \end{cases}$

Cộng (1) với (2) theo vế ta được $y^3 + y = \frac{3x^3+9x^2+12x+6}{3} \Leftrightarrow y^3 + y = (x+1)^3 + x + 1$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$, vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(3) \Leftrightarrow f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$. Thay vào (2) ta được

$$3x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 - 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình trên là $x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ suy ra $a = 2, b = 3, c = 7$.

Vậy $S = a^2 + b^3 + c^4 = 2^2 + 3^3 + 7^4 = 2432$.

Đối với học sinh lớp 10, ta chứng minh hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ như sau:

Với mọi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2$, ta có $\dfrac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \dfrac{t_1^3 + t_1 - t_2^3 - t_2}{t_1 - t_2} = t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 1 = \left(t_1 + \dfrac{t_2}{2}\right)^2 + \dfrac{3t_2^2}{4} + 1 > 0$

*** Cách giải khác của cô Lưu Thêm:**

$$3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (3x^3 - 7x^2 + 6x + 4) + (16x^2 + 6x + 2) = (16x^2 + 6x + 2) + 3\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) = (16x^2 + 6x + 2) + 3\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = \frac{16x^2 + 6x + 2}{3} + \sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$, vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{16x^2 + 6x + 2}{3}}\right) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{\dfrac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 - 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$$

Email: nguynhuthai1977@gmail.com

Câu 15. Phương trình $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$ có hai nghiệm a,b với $a<b$.

Có bao nhiêu số nguyên dương thuộc $[a;b]$.

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 4 .

Lời giải

Tác giả : Ngụy Như TháiTên FB: Ngụy Như Thái

Chọn B

- Điều kiện: $\begin{cases} 7-x\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ -x^2+8x-7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le 7$.

$(*)\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{7-x}-\sqrt{(7-x)(x-1)}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\sqrt{7-x}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 hai số nguyên dương là 4 và 5.

Email: huunguyen1979@gmail.com

Câu 16. Biết $x=a+b\sqrt{5}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình :

$\sqrt[3]{x^3+10x^2+56x+66}-x=2\left(\sqrt{x^2-4x-1}+2\right)$. Tính $T=a^3+b^3$?

A. $T=9$. **B.** $T=8$. **C.** $T=7$. **D.** $T=125$.

Lời giải

Họ và tên : Đào Hữu NguyênTên FB: Đào Hữu Nguyên

Chọn C

Điều kiện : $x^2-4x-1\ge 0$ (1)

Ta có $\sqrt[3]{x^3+10x^2+56x+66}=2\sqrt{x^2-4x-1}+4+x$

Do $\sqrt{x^2-4x-1}\geq 0$ nên $\sqrt[3]{x^3+10x^2+56x+66}\geq 4+x \Leftrightarrow x^3+10x^2+56x+66\geq 64+48x+12x^2+x^3$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1\leq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{5} \\ x=2+\sqrt{5} \end{array}\right.$. Vậy $T=7$

Câu 17. Biết phương trình : $8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1}$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 $(x_1<x_2<x_3)$.

Tính $T=x_1+(\sqrt{7}+1)x_2+x_3$?

A. $T=\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$. **B.** $T=\dfrac{3}{2}$. **C.** $T=3$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Họ và tên : Đào Hữu NguyênTên FB: Đào Hữu Nguyên

Chọn C

Điều kiện : $2x^2-3x+1\geq 0$

$Pt \Leftrightarrow 8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1} \Leftrightarrow 4(x-\sqrt{2x^2-3x+1})^2=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2x^2-3x+1}=1 \\ 2\sqrt{2x^2-3x+1}=4x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4} \\ x=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4} \end{array}\right.$

Vậy $T=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}+\left(\sqrt{7}+1\right)\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}=3$

Email: Phungthan.ddn@gmail.com

Câu 18. Phương trình $x=\sqrt{2019x-\dfrac{2019}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2019}{x}}$ có nghiệm $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}, a,b,c\in N$ và $\dfrac{a}{c}$ là phân số tối giản.

Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{(a+c)^2-b}{4}$ là

A. 2017 **B.** 2018 **C.** 2019 **D.** 2020

Lời giải

Tác giả : Phùng Văn ThânTên FB: Thân Phùng

Chọn C

Cách 1

Điều kiện $x \in [-1;0) \cup [2019;+\infty)$

Trường hợp 1: $x \in [-1;0)$ Vế trái âm vế phải dương nên phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x \in [2019;+\infty)$

Ta có $\sqrt{2019x - \dfrac{2019}{x}} = \sqrt{2019\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \le \dfrac{2019 + x - \dfrac{1}{x}}{2}$

$\sqrt{1 - \dfrac{2019}{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{x}(x - 2019)} \le \dfrac{\dfrac{1}{x} + x - 2019}{2}$

Suy ra $\sqrt{2019x - \dfrac{2019}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{2019}{x}} \le x$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 2019 = x - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{x} = x - 2019 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2019 + \sqrt{4076365}}{2}$ ta có $a = 2019, b = 4076365, c = 2$

Vậy $P = 2019$ chọn C

Cách 2

Điều kiện $x \in [-1;0) \cup [2019;+\infty)$

Trường hợp 1: $x \in [-1;0)$ Vế trái âm vế phải dương nên phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x \in [2019;+\infty)$

Phương trình trở thành

$$x-\sqrt{1-\frac{2019}{x}}=\sqrt{2019x-\frac{2019}{x}}$$

$$\Rightarrow x^2-2019x-2\sqrt{x^2-2019x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2019x}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2019x=1$$

$$\Rightarrow x=\frac{2019+\sqrt{4076365}}{2}$$

Kiểm tra lại $x=\dfrac{2019+\sqrt{4076365}}{2}$ là nghiệm phương trình. Ta có $a=2019,b=4076365,c=2$

Vậy $P=2019$ chọn C

Email: hoxuandung1010@gmail.com

Câu 19. Cho biết nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{x^3+5x^2}-1=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}$ có dạng $x=a+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+ax+b$ là

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Tác giả : Hồ Xuân DũngTên FB: Dũng Hồ Xuân

Chọn D

$\sqrt[3]{x^3+5x^2}-1=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}$.

Điều kiện xác định: $5x^2-2\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}(t\ge 0)$. Ta có $5x^2=6t^2+2$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt[3]{x^3+6t^2+2}-1=t\Leftrightarrow x^3+6t^2+2=(t+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3=(t-1)^3\Leftrightarrow x=t-1\Leftrightarrow t=x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5x^2-2}{6}}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \dfrac{5x^2-2}{6}=(x+1)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+12x+8=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=-6+\sqrt{28}$ (tm đk).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-6+\sqrt{28}$.

Khi đó $y=x^2-6x+28=(x-3)^2+19\geq 19$

Email: *dacgiap@gmail.com*

Câu 20. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$ có dạng $x=m+n\sqrt{p}$ (với $m,n\in\mathbb{Z}$ và p là số nguyên tố). Tính giá trị $T=m+n+p$.

A. $T=25$. **B.** $T=27$. **C.** $T=3$. **D.** $T=7$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Đắc Giáp,Tên FB: Nguyễn Đắc Giáp

Chọn A

Điều kiện: $-12\leq x\leq 4$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\left(x+3\right)\sqrt{-x^2-8x+48}=2\left(x-24\right)$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+6x+9\right)+2\left(x+3\right)\sqrt{-x^2-8x+48}+\left(-x^2-8x+48\right)=9$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+3\right)+\sqrt{-x^2-8x+48}\right]^2=9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(x+3\right)+\sqrt{-x^2-8x+48}=3 & (1)\\ \left(x+3\right)+\sqrt{-x^2-8x+48}=-3 & (2)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 0\\ -2x^2-8x+48=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-2-2\sqrt{7}\\ x=-2+2\sqrt{7}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-2-2\sqrt{7} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq -6\\ -2x^2-20x+12=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq -6\\ \left[\begin{array}{l}x=-5-\sqrt{31}\\ x=-5+\sqrt{31}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-5-\sqrt{31} \text{ (thỏa mãn).}$$

Nghiệm nhỏ nhất sẽ là $x=-5-\sqrt{31}$. Do đó $m+n+p=-5-1+31=25$.

Pt_Nguyen Van Tỉnh

Câu 21. Nghiệm dương của phương trình $\sqrt{2x^4+3x^3+12x^2+15x+10}-\dfrac{3x^2+3x+1}{2}=3$ có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với c là số nguyên tố, b là số tự nhiên , a là số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=-5$ **B.** $T=20$ **C.** $T=8$ **D.** $T=-2$

Lời giải

Sử dụng cách phân tích $2x^4+3x^3+12x^2+15x+10=(2x^2+ax+2)(x^2+bx+5)\Rightarrow a=3;b=0$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{(2x^2+3x+2)(x^2+5)}=\dfrac{(2x^2+3x+2)+(x^2+5)}{2}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+5}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+5}$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+2=x^2+5\Leftrightarrow x^2+3x-3=0$.

Từ đó phương trình có nghiệm dương là $x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$.Suy ra $a=-3,b=21,c=2$

Vậy $T=a+b+c=20$

Email: nguyenmanhhA.1987@gmail.com

Câu 22. Cho phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ có ba nghiệm phân biệt trong đó nghiệm bé nhất được biểu thị dưới dạng $\dfrac{a-\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $b\ge 0,a<0,c<3$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3$?

A. 134. **B.** 132. **C.** 116. **D.** 118.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Mạnh HàTên FB: Nguyễn Mạnh Hà

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}\Rightarrow t^3=2x-1$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{cases}x^3+1=2t\\x^3-t^3=2(t-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+1=2t\\(x-t)\left[\left(x+\dfrac{1}{2}t\right)^2+\dfrac{3}{4}t^2+2\right]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+1=2t\\x=t\end{cases}$$

Ta được $x^3+1=2x \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Nghiệm bé nhất của phương trình là $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, do đó $a=-1; b=5; c=2$ và $P=132$.

Câu 23. Nghiệm dương của phương trình: $-x^2+\sqrt{x^3+8}+4x=0$ có dạng $x=a+\sqrt{b}$, trong đó $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu $P=a^{10}+b^2$.

A. 59218. **B.** 48324. **C.** 72968. **D.** 42134.

Tác giả: Trần Gia Chuân Tên FB: Trần gia Chuân

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\geq -2$

Ta có : $-x^2+\sqrt{x^3+8}+4x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+8}=x^2-4x$

Đặt $u=\sqrt{x+2}$, và $v=\sqrt{x^2-2x+4}$ với $u\geq 0, v\geq\sqrt{3}$

Khi đó $\begin{cases} -2u^2+v^2=x^2-4x \\ uv=x^2-4x \end{cases}$

Phương trình ban đầu trở thành

$-2u^2+v^2=uv \Leftrightarrow 2u^2+uv-v^2=0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{u}{v}\right)^2+\dfrac{u}{v}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{u}{v}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{u}{v}=-1(loai) \end{array}\right.$

Với $\dfrac{u}{v}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2u=v \Leftrightarrow 4x+8=x^2-2x+4 \Leftrightarrow x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13} \\ x=3-\sqrt{13} \end{array}\right.$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm dương là $x=3+\sqrt{13} \Rightarrow P=a^{10}+b^2=59218$.

Tác giả : Nguyễn Văn ToảnTên FB: Dấu Vết Hát

Email: nguyenvantoannbk@gmail.com *Nhờ thầy cô góp ý!*

Câu 24. Biết phương trình $7x^2+7x=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$ có một nghiệm dương dạng $\dfrac{-m+5\sqrt{n}}{p}$ với $m,n,p\in N^*, p\le 14.$.

Tính giá trị biểu thức $A=p^3-3m^3-5n^4$.

A. $A=2017$. **B.** $A=2019$. **C.** $A=2016$. **D.** $A=2018$.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x\ge -\dfrac{9}{4}$. Ta có: $7x^2+7x=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}\Leftrightarrow 7\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}=\sqrt{\dfrac{1}{7}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}}$.

Đặt $a=x+\dfrac{1}{2}$, ta được phương trình $7a^2-\dfrac{7}{4}=\sqrt{\dfrac{1}{7}a+\dfrac{1}{4}}$.

Đặt $b=\sqrt{\dfrac{1}{7}a+\dfrac{1}{4}}\Leftrightarrow b^2=\dfrac{1}{7}a+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 28b^2=4a+7\ ^{(1)}\ (b\ge 0)$.

Lại có $7a^2-\dfrac{7}{4}=b\Leftrightarrow 28a^2=4b+7\ ^{(2)}$. Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}28a^2=4b+7\\28b^2=4a+7\end{cases}\Rightarrow$

$$28(a+b)(a-b)=4(b-a)\Leftrightarrow (a-b)[7(a+b)+1]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\7(a+b)+1=0\end{array}\right.$$

Với $a=b\Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{7}a+\dfrac{1}{4}}=a\Rightarrow a=\dfrac{1+5\sqrt{2}}{14}\Rightarrow x=\dfrac{-6+5\sqrt{2}}{14}$.

Với $7(a+b)+1=0\Rightarrow 7a+7\sqrt{\dfrac{1}{7}a+\dfrac{1}{4}}+1=0\Leftrightarrow 7\sqrt{\dfrac{1}{7}a+\dfrac{1}{4}}=-1-7a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\le -\dfrac{1}{7}\\49a^2+7a-\dfrac{45}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a\le -\dfrac{1}{7}\\ \left[\begin{array}{ll}a=\dfrac{-1+\sqrt{46}}{14} & (l)\\ a=\dfrac{-1-\sqrt{46}}{14} & (t/m)\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=-\dfrac{8+\sqrt{46}}{14}<0$$

Vậy $m=6,n=2,p=14\Rightarrow A=p^3-3m^3-5n^4=14^3-3.6^3-5.2^4=2016$. Vậy chọn **C.**

Email: BuiChithAnh1987@gmAil.Com

Câu 25. Nghiệm lớn nhất của phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{x^2+2}=\dfrac{2}{5}$ có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}\ (a,b\in\mathbb{N}^*)$

Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $2a+b<35$. **B.** $a+2b=55$. **C.** $a=3b+7$. **D.** $a+b\in(32;45)$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Chí Thanh **Tên Facebook: Thanhbui**

Chọn C

Điều kiện : $x \ge -1$

Cách 1: Đặt $y = \sqrt{x+1} \ge 0; z = \sqrt{x^2 - x + 1}$, ta được:

$$5yz = 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow \frac{5y}{z} = 2\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{z}\right)^2 - \frac{5y}{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{y}{z} = 2 \\ \frac{y}{z} = \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Nếu $\frac{y}{z} = 2$ ta được $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Nếu $\frac{y}{z} = \frac{1}{2}$ ta được $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn)

Suy ra $a = 5; b = 37 \Rightarrow a + b \in (32; 45)$

Cách 2: $\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2+2} = \frac{2}{5}$ ĐK: $x \ge -1$

$$\Leftrightarrow 5.\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} = 2(x^2 - x + 1) + 2(x+1)$$

Chia cả 2 vế cho $x^2 - x + 1$ ta được

$$5.\sqrt{\frac{(x+1)}{(x^2 - x + 1)}} = 2 + 2.\frac{x+1}{(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{(x+1)}{(x^2 - x + 1)}} = 2 \\ \sqrt{\frac{(x+1)}{(x^2 - x + 1)}} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đến đây làm giống như cách 1 ta được kết quả.

(Email): locleduc10@gmail.com

Câu 26. Phương trình $x^4 - 6x - 1 = 2(x+4)\sqrt{2x^3 + 8x^2 + 6x + 1}$ có tổng tất cả các nghiệm thực bằng:

A. -5. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Điều kiện: $2x^3+8x^2+6x+1\ge 0.$

pt $\Leftrightarrow (x^2)^2-(6x+1)=(2x+8)\sqrt{(2x+8)x^2+(6x+1)}.$

Đặt $\begin{cases} u=x^2\ge 0 \\ v=\sqrt{(2x+8)x^2+(6x+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2-(6x+1)=(2x+8)\cdot v \\ v^2-(6x+1)=(2x+8)\cdot u \end{cases}$

$$\Rightarrow u^2-v^2=(2x+8)(v-u)\Leftrightarrow (u-v)(u+v+2x+8)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+2x+8=0 \end{array}\right..$$

- Với $u=v,$ suy ra: $\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}=x^2\Leftrightarrow x^4-2x^3-8x^2-6x-1=0\quad (i)$

$\Leftrightarrow (x^2-4x-1)(x^2+2x+1)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2\pm\sqrt{5}.$

- Với $u+v+2x+8=0,$ suy ra: $\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+(x+1)^2=-7:$ vô nghiệm.

So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-1,\ x=2\pm\sqrt{5}.$

(Tác giả : Lê Đức Lộc,Tên FB: Lê Đức Lộc)

Cách 2: (được Thầy Nguyễn Văn Quý góp ý)

pt $\Leftrightarrow x^4-\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)=2(x+4)\left(\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}-x^2\right)$

$$\Leftrightarrow x^4-\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)=2(x+4)\frac{\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)-x^4}{\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[x^4-\left(2x^3+8x^2+6x+1\right)\right]\left[1+\frac{2(x+4)}{\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+x^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^4-2x^3-8x^2-6x-1=0 & (1) \\ \sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+x^2+2x+8=0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow (x^2-4x-1)(x^2+2x+1)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2\pm\sqrt{5}.$

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+(x+1)^2+7=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1,\ x=2\pm\sqrt{5}.$

Cách 3: (được Thầy Quân Harymon góp ý)

- Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm pt đã cho.
- Với $x\ne 0:$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 \\ b = \sqrt{2x^3+8x^2+6x+1} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{2x^3+8x^2+6x+1}{x^2} = 2x+8+\dfrac{6x+1}{a} \Rightarrow 2x+8 = \dfrac{b^2}{a} - \dfrac{6x+1}{a}.$

Phương trình trở thành: $a^2-(6x+1) = \left(\dfrac{b^2}{a} - \dfrac{6x+1}{a}\right)b$

$\Leftrightarrow a^3-b^3-(6x+1)(a-b)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \quad (1) \\ a^2+ab+b^2-(6x+1)=0 \quad (2) \end{array}\right.$

$(1) \Rightarrow \sqrt{2x^3+8x^2+6x+1} = x^2 \Leftrightarrow x^4-2x^3-8x^2-6x-1=0$

$\Leftrightarrow (x^2-4x-1)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x = 2\pm\sqrt{5}.$

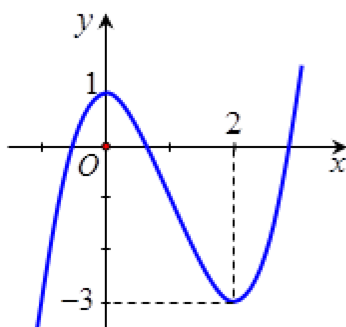
$(2) \Rightarrow x^4+2x^3+8x^2+x^2\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2+2x+8\right)+x^2\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}=0$

$\Leftrightarrow x^2\left[(x+1)^2+7\right]+x^2\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}=0$ (vô nghiệm với mọi $x \neq 0$)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1,\ x=2\pm\sqrt{5}.$

Email: minh.love.math@gmail.com

Câu 27. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)-2\sqrt[3]{f\left(x\right)}=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Họ tên tác giả: Trần văn Minh Facebook: Trần văn Minh

Chọn D

Cách 1: Ta có $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)-2\sqrt[3]{f\left(x\right)}=0 \Leftrightarrow f^3\left(x\right)+2f\left(x\right)=f\left(x\right)+2\sqrt[3]{f\left(x\right)}$

Đặt $a = f(x); b = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow a^3 + a = b^3 + b$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{f(x)}$

$\Leftrightarrow f^3(x) = f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

+ Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm phân biệt không trùng 3 nghiệm trên.

+ Phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm phân biệt không trùng 5 nghiệm trên.

Vậy phương trình $f^3(x) + f(x) - 2\sqrt[3]{f(x)} = 0$ có 8 nghiệm phân biệt.

Cách 2: đặt $t = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow t^9 + t^3 - 2t = 0 \Leftrightarrow t(t^8 + t^2 - 2) = 0$

Dùng sơ đồ Hoocner tìm được $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 8 nghiệm phân biệt.

Nguyễn Văn Xuân

Câu 28. Cho phương trình: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$

Biết phương trình trên có hai nghiệm dạng $x_1 = a;\ x_2 = b + \sqrt{c}$ (với a, b, c là các số nguyên). Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$

A. 6 **B.** 9 **C.** 11 **D.** 14

Giải

Điều kiện: $x \in [-1;3]$

Xét $\vec{u} = (x;\ 1),\ \vec{v} = (\sqrt{1+x};\ \sqrt{3-x})$

$\Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \sqrt{1+x^2},\ \left|\vec{v}\right| = 2$

Ta có $\vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow x.\sqrt{1+x}+1.\sqrt{3-x} \le 2.\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow VT \le VP$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > 0$

Giải pt này được $x_1 = 1;\ x_2 = 1+\sqrt{2}$.

Chọn A

Email: ***DAnhDuoC@gmAil.Com***

Câu 29. Gọi x_0 là nghiệm âm của phương trình: $7x^2-13x+8 = 2x^2.\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$. Biết x_0 có dạng $-\dfrac{(a+\sqrt{b})}{c}$ với a,b,c là các số tự nhiên , a là số nguyên tố. Hỏi tổng $T = b+2a-c$ chia hết cho số nào sau đây?

A. 17. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Tác giả: Vũ Danh Được,Tên FB: Danh Được Vũ

Chọn B

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm phương trình nên chia 2 vế pt cho x^3 ta được: $\dfrac{7}{x}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{8}{x^3} = 2.\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$

Đưa phương trình về dạng: $\left(\dfrac{2}{x}-1\right)^3+2.\left(\dfrac{2}{x}-1\right) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}\right)^3+2.\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}\ (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3+2t$ với $t\in\mathbb{R}$, hàm này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

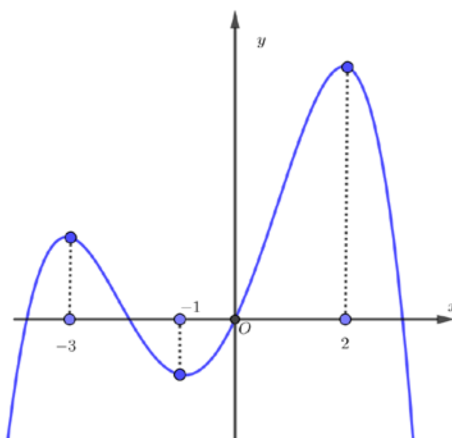
Phản biện : lớp 10 chưa học kĩ về tính đơn điệu của hàm số bậc ba. Nên thay đổi lại cách giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ. Đặt $a = \dfrac{2}{x}-1; b = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-3} = \dfrac{2}{x}-1 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3}-\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{3}{x}+2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}=1\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{16}{5\pm\sqrt{89}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-5+\sqrt{89}}{4}\\ x=-\left(\dfrac{5+\sqrt{89}}{4}\right)\end{array}\right.$

Vậy $x_0 = -\left(\dfrac{5+\sqrt{89}}{4}\right) \Rightarrow T = 89 + 2.5 - 4 = 95 \vdots 19$

Email: quocdai1987@gmail.com

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $f\left(\sqrt{1-\sin x}\right) = f\left(\sqrt{1+\cos x}\right)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thuộc $(-3;2)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Tác giả : Trần Quốc ĐạiTên FB: www.facebook.com/tqd1671987

Chọn B

Phản biện: câu này không phù hợp với chuyên đề 3 này.

$x \in (-3;2) \Rightarrow \begin{cases} -1 < \sin x < 1 \\ -1 < \cos x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sqrt{1-\sin x} < \sqrt{2} \\ 0 < \sqrt{1+\cos x} < \sqrt{2} \end{cases}$

$f\left(\sqrt{1-\sin x}\right) = f\left(\sqrt{1+\cos x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1-\sin x} = \sqrt{1+\cos x}$ (Vì $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Do $x \in (-3;2) \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4}$ thỏa phương trình. Vậy có duy nhất 1 nghiệm.

Gmail: thAnhhuyenymB@gmAil.Com

Câu 31. Số nghiệm của phương trình $12\sqrt{5+x} + 3\sqrt{25-x^2} = 25 + 4x + \sqrt{80-16x}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

GV: Nguyễn Thị Thanh Huyền,FB: ThAnhhuyenymB Nguyen

Chọn B

+ Điều kiện: $\begin{cases} 5+x\ge 0 \\ 80-16x\ge 0 \\ 25-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5\le x\le 5$.

+ Ta có: $12\sqrt{5+x}+3\sqrt{25-x^2}=25+4x+4\sqrt{5-x}$

$\Leftrightarrow 4\left(3\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\right)+3\sqrt{25-x^2}-25-4x=0$.

Đặt $t=3\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x} \Rightarrow 3\sqrt{25-x^2}-25-4x=-\dfrac{t^2}{2}$.

Phương trình trở thành: $4t-\dfrac{t^2}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=8 \end{array}\right.$.

+Với $t=0$, ta có $3\sqrt{5+x}=\sqrt{5-x} \Leftrightarrow 9\left(5+x\right)=5-x \Leftrightarrow x=-4$ (thoả đk).

+ Với $t=8$, ta được: $3\sqrt{5+x}=8+\sqrt{5-x} \Leftrightarrow 5x-12=8\sqrt{5-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ 25x^2-56x-176=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-\dfrac{44}{25} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4$ (thoả mãn đk)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\pm 4$.

Email: nguyendangdungpc@gmail.com

Câu 32. Nghiệm lớn nhất của phương trình $\left(x^2-6x+11\right)\sqrt{x^2-x+1}=2\left(x^2-4x+7\right)\sqrt{x-2}$ (1)

có dạng $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và a là số nguyên tố. Tổng $S=a+b+c$ là

A. 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Đăng DũngTên FB: Dũng Nguyễn Đăng

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 2$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2-x+1}=a \\ \sqrt{x-2}=b \end{cases}$ điều kiện $a>0, b\geq 0$

Sử dụng đồng nhất thức ta tìm được $\begin{cases} x^2-6x+11=a^2-5b^2 \\ x^2-4x+7=a^2-3b^2 \end{cases}$

Phương trình (1) trở thành: $\left(a^2-5b^2\right)a=2\left(a^2-3b^2\right)b$

$\Leftrightarrow a^3-2a^2b-5ab^2+6b^3=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-3b)(a+2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=3b \end{array}\right.$

+) $a=b$ suy ra $\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ vô nghiệm

+) $a=3b$ suy ra $\sqrt{x^2-x+1}=3\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2-10x+19=0 \Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{6}$ thỏa mãn (1)

Suy ra nghiệm lớn nhất của phương trình là $x=5+\sqrt{6}$

Suy ra $S=a+b+c=12$

VDC PT-HPT CHỨA CĂN

Email: thinhvanlamha@gmail.com

Câu 1. Giải phương trình: $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ ta được một nghiệm $x=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{N},b<20$. Tính giá trị biểu thức $P=a^3+2b^2+5c$.

A. $P=61$. **B.** $P=29$. **C.** $P=109$. **D.** $P=73$.

Tác giả: Nguyễn Văn Thịnh FB: Thịnh Nguyễn Văn

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right).1}+\sqrt{(x-1).\frac{1}{x}}\le\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}+1+x-1+\frac{1}{x}\right)=x$, do đó phương trình

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{x}=1\\x-1=\frac{1}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $a=1,b=5,c=2\Rightarrow P=a^3+2b^2+5c=61$.

Câu 2. Phương trình $\sqrt{x^2+481}-3\sqrt[4]{x^2+481}=10$ có hai nghiệm α,β. Khi đó tổng $\alpha+\beta$ thuộc đoạn nào sau đây?

A. $[-5;-1]$. **B.** $[-10;-6]$. **C.** $[2;5]$. **D.** $[-1;1]$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[4]{x^2+481},t>0$, ta được phương trình $t^2-3t=10\Leftrightarrow t^2-3t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=-2\,(loai)\end{array}\right.$

Với $t=5$ thì $\sqrt[4]{x^2+481}=5\Leftrightarrow x^2+481=625\Leftrightarrow x^2=144\Leftrightarrow x=\pm 12$

Suy ra $\alpha+\beta=0$.

Chọn D

Email: ntpAnh1079@tuyenquAng.eDu.vn

Câu 3. Biết nghiệm nhỏ nhất của phương trình $3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$ có dạng $\dfrac{a-\sqrt{c}}{b}$ $\left(a,b,c\in\mathbb{N}^*\right),\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^3+c^4$.

A. $S=2428.$ **B.** $S=2432.$ **C.** $S=2418.$ **B.** $S=2453.$

Họ tên tác giả: ***Ngyễn Thị Phương Anh,Tên FB: Nguyễn Thị Phương Anh***

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$. Ta có hệ $\begin{cases} y^3=\dfrac{16x^2+6x+2}{3} & (1) \\ y=\dfrac{3x^3-7x^2+6x+4}{3} & (2) \end{cases}$

Cộng (1) với (2) theo vế ta được $y^3+y=\dfrac{3x^3+9x^2+12x+6}{3}\Leftrightarrow y^3+y=\left(x+1\right)^3+x+1$ (3)

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t,t\in\mathbb{R}$, vì $f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $\left(3\right)\Leftrightarrow f\left(y\right)=f\left(x+1\right)\Leftrightarrow y=x+1$. Thay vào (2) ta được

$$3x^3-7x^2+3x+1=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(3x^2-4x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình trên là $x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ suy ra $a=2,b=3,c=7$.

Vậy $S=a^2+b^3+c^4=2^2+3^3+7^4=2432$.

Đối với học sinh lớp 10, ta chứng minh hàm $f\left(t\right)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ như sau:

Với mọi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2$**, ta có** $\dfrac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=\dfrac{t_1^3+t_1-t_2^3-t_2}{t_1-t_2}=t_1^2+t_1t_2+t_2^2+1=\left(t_1+\dfrac{t_2}{2}\right)^2+\dfrac{3t_2^2}{4}+1>0$

*** Cách giải khác của cô Lưu Thêm:**

$$3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^3-7x^2+6x+4\right)+\left(16x^2+6x+2\right)=\left(16x^2+6x+2\right)+3\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3+3x^2+4x+2\right)=\left(16x^2+6x+2\right)+3\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+x+1=\frac{16x^2+6x+2}{3}+\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, t\in\mathbb{R}$, vì $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}\right) \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$$\Leftrightarrow 3x^3-7x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2-4x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$$

Email: giaohh2@gmail.com

Câu 4. Biết phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{(x+1)^3}=0$ có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt{a}-b}{c}$. Trong đó a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Tác giả : Nguyễn Xuân Giao,Tên FB: giaonguyen

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x\geq 0$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{(x+1)^3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x+2)}=x^3+2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow (x^3+2x^2)-2\sqrt{x^3+2x^2}+1=0 \Leftrightarrow x^3+2x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy $a=5;b=1;c=2 \Rightarrow a+b+c=8$

Câu 5. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\sqrt[3]{7x+1}+\sqrt[3]{8+x-x^2}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$ là :

A. -18. **B.** 18. **C.** -9. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{7x+1}+\sqrt[3]{8+x-x^2}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$ (1)

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{7x+1} \\ b=\sqrt[3]{8+x-x^2} \\ c=\sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3=7x+1 \\ b^3=8+x-x^2 \\ c^3=x^2-8x-1 \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3+c^3=8$ (2)

Khi đó (1) trở thành $a+b+c=2$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left[(a+b+c)^2+(a+b+c)c+c^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left[3c^2+3ab+3ac+3bc\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

+ TH1: $a=-b \Rightarrow x^2-8x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=9 \end{array}\right.$

+ TH2: $b=-c \Rightarrow 7x+1=8 \Leftrightarrow x=1$

+ TH3: $a=-c \Rightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Thử lại ta suy ra tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1;0;1;9\}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $T=9$

Tên FB: Euro Vũ

Câu 6. Gọi x_0 là nghiệm thực của phương trình $x\sqrt{5x^2+1}+x\sqrt{6x^2+1}-\sqrt{2x^4+2x^2+1}=x^2+1$, biết bình phương của nghiệm x_0 có dạng $x_0^2=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$, $\frac{a}{b}$ tối giản .Tính $S=a+b+c$

A. $S=26$. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 22.

Ngô Nguyễn Anh Vũ Email: ngonguyenanhvu@gmail.com

Lời giải

Vì : $x\left(\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{6x^2+1}\right)=\sqrt{2x^4+2x^2+1}+x^2+1>0\Rightarrow x>0$

Điệu kiện : $x>0$

Chia x^2 hai vế : $\left(\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{6+\frac{1}{x^2}}\right)=\sqrt{2+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+1+\frac{1}{x^2}$ Đặt : $t=\frac{1}{x^2}>0$

$\sqrt{5+t}+\sqrt{6+t}=\sqrt{2+2t+t^2}+1+t$

$\sqrt{5+t}+\sqrt{\left(\sqrt{5+t}\right)^2+1}=(1+t)+\sqrt{(1+t)^2+1}$

Đặt $u=\sqrt{5+t},v=1+t$. Điều kiện: $u>\sqrt{5},v>1$

Lúc đó $u+\sqrt{u^2+1}=v+\sqrt{v^2+1}\Leftrightarrow f(u)=f(v)$

Cách 1: Xét hàm đặt trưng : $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ Điều kiện : $t>1$

$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ nên ta có u = v

Khi đó $\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 5+\frac{1}{x^2}=1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}-4=0 \Leftrightarrow 4x^4-x^2-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\frac{1+\sqrt{17}}{8}(n) \\ x^2=\frac{1-\sqrt{17}}{8}(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow S=26$$

Cách 2: $u+\sqrt{u^2+1}=v+\sqrt{v^2+1} \Leftrightarrow u-v+\left(\sqrt{u^2+1}-\sqrt{v^2+1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow (u-v)\left[1+\frac{u+v}{\sqrt{u^2+1}+\sqrt{v^2+1}}\right]=0 \Leftrightarrow u=v$$

Khi đó ta có $\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow 5+\frac{1}{x^2}=1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}-4=0 \Leftrightarrow 4x^4-x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\frac{1+\sqrt{17}}{8}(n) \\ x^2=\frac{1-\sqrt{17}}{8}(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow S=26$$

Email: chitoannd@gmail.com

Câu 7. Biết rằng phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=x^2-x-2$ (1) có nghiệm là $x=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$. Tính giá trị của biểu thức $T=2a+11b-1986c$, biết a,b,c là các số nguyên tố ?

A. $T=-3911$. **B.** $T=3911$. **C.** $T=-3929$. **D.** $T=3929$.

Tác giả : Nguyễn Văn Chí,Tên FB: Nguyễn Văn Chí

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $0\le x\le 3$. Vì $VT\ge 0 \Rightarrow VP\ge 0 \Rightarrow x\in[2;3]$.

Với mọi $x\in[2;3]$ ta có: $(1) \Leftrightarrow (x-1)-\sqrt{x}+(x-2)-\sqrt{3-x}+x^2-3x+1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{(x-1)+\sqrt{x}}+\frac{x^2-3x+1}{(x-2)+\sqrt{3-x}}+x^2-3x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+1\right)\left(\frac{1}{(x-1)+\sqrt{x}}+\frac{1}{(x-2)+\sqrt{3-x}}+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Do vậy $a=3, b=5, c=2$ nên $T=-3911$

Thêm CáCh CASIO CủA thầy Trịnh Văn ThạCh

Thầy dò ra 1 nghiệm. Gán nó vào **A.** Chọn mode 7, nhập vào f(X)= A^2-**A.**X sau đó start là -5 end là 5 step là 1. Nhấn =. Thầy sẽ thấy tại X=-3 thì f(X) nguyên, hình như bằng -1. Em sẽ đoán ra đc nghiệm đó bản chất là nghiệm của pt bậc 2: x^2+3x-1=0

Email: phamquynhanhbaby56@gmail.com

Câu 8. Biết rằng nghiệm thực lớn nhất của phương trình $\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+x+1}+x^3-3x^2-5x+2=0$ có dạng $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a, c là các số nguyên và b là số nguyên tố. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=15$. **B.** $S=16$. **C.** $S=13$. **D.** $S=14$.

Tác giả: Nguyễn Thị Thỏa Facebook: Nguyễn Thị Thỏa

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x^2+2)\sqrt{x^2+x+1}+x^3-3x^2-5x+2=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)\sqrt{x^2+x+1}+(x^2+2)(x-3)-7x+8=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x-3\right)=\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-(x-3)^2$

$\Leftrightarrow (x^2+2)(\sqrt{x^2+x+1}+x-3)=(\sqrt{x^2+x+1}+x-3)(\sqrt{x^2+x+1}-x+3)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+1}=3-x\\ x^2+2=\sqrt{x^2+x+1}+3-x\end{array}\right.$

TH1: $\sqrt{x^2+x+1}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ x^2+x+1=9-6x+x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{7}$.

TH2: $x^2+2=\sqrt{x^2+x+1}+3-x \Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{x^2+x+1}-2=0$

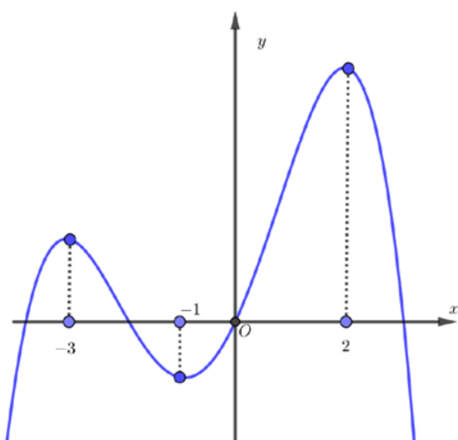
$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+1}+1)(\sqrt{x^2+x+1}-2)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm thực lớn nhất là $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Đối chiếu với các đáp án ta chọn **D.**

Email: quocdai1987@gmail.com

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $f\left(\sqrt{1-\sin x}\right)=f\left(\sqrt{1+\cos x}\right)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm $x\in(-3;2)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Tác giả : Trần Quốc Đại,Tên FB: www.facebook.com/tqd1671987

Lời giải

Chọn B

$$x\in(-3;2)\Rightarrow\begin{cases}-1<\sin x<1\\-1<\cos x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\sqrt{1-\sin x}<\sqrt{2}\\0<\sqrt{1+\cos x}<\sqrt{2}\end{cases}$$

$f\left(\sqrt{1-\sin x}\right)=f\left(\sqrt{1+\cos x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{1-\sin x}=\sqrt{1+\cos x}$ (vì $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\sqrt{2}\right)$)

$$\Leftrightarrow\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Do $x\in(-3;2)\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ thỏa phương trình. Vậy có duy nhất 1 nghiệm.

Gmail: nhAttoAnts5@gmAil.Com

Câu 10. Biết rằng nghiệm lớn nhất của phương trình: $4x^3+2x^2=\sqrt{\left(x^4+1\right)\left(x^4+16x^2+8x+1\right)}$ có dạng $x=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{-b+c\sqrt{2}}}{2}$, trong đó a,b,c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $N=c+b-a$ bằng

A. 8. **B.** 6. **C.** 0. **D.** 2.

Họ và tên: Nguyễn Trọng Nhật FB: Quynhanh Nguyen

Lời giải.

Chọn C

$4x^3+2x^2=\sqrt{(x^4+1)(x^4+16x^2+8x+1)}\leftrightarrow x^2(4x+1)+x^2=\sqrt{x^4+1}.\sqrt{x^4+(4x+1)^2}$ (1)

Đặt $\begin{cases}\vec{u}=(x^2;1)\\ \vec{v}=(4x+1;x^2)\end{cases}$ khi đó $\vec{u}.\vec{v}=4x^3+2x^2$ và $|\vec{u}|.|\vec{v}|=\sqrt{x^4+1}.\sqrt{x^4+(4x+1)^2}$

Mà ta luôn có: $\vec{u}.\vec{v}\le|\vec{u}|.|\vec{v}|\to 4x^3+2x^2\le\sqrt{x^4+1}.\sqrt{x^4+(4x+1)^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng hay $\dfrac{x^2}{4x+1}=\dfrac{1}{x^2}$

$\leftrightarrow x^4-4x-1=0$

$\leftrightarrow (x^2+1)^2=2(x+1)^2$

$\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+\sqrt{2}.x+1+\sqrt{2}=0(VN)\\ x^2-\sqrt{2}.x+1-\sqrt{2}=0\end{array}\right.$

Từ đây ta tìm được nghiệm lớn nhất là $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{-2+4\sqrt{2}}}{2}$

Vậy $N=c+b-a=0$

Email: **Ngocchigvt@gmail.com**

Câu 11. Cho phương trình $\dfrac{3(x^2+2x-3)}{\sqrt{x+4}-1}-\dfrac{7x^2-19x+12}{\sqrt{12-7x}}=16x^2+11x-27$ có hai nghiệm $x=a$ và $x=\dfrac{-b+c\sqrt{d}}{e}$ với $a,b,c,d,e\in N$ và $\dfrac{b}{e}$ là phân số tối giản. Khi đó hệ thức nào sau đây đúng ?

A. $2(b+e-a)=c+d$. **B.** $2(b+e+a)=c+d$. **C.** $b+e-a=c+d$. **D.** $b+e+a=c+d$.

Tác giả : **Nguyễn Ngọc Chi,*****Tên FB:*** **Nguyễn Ngọc Chi**

Lời giải

Chọn A

Đk: $\begin{cases} -4 \le x < \dfrac{12}{7} \\ x \ne -3 \end{cases}$

Ptrình $\Leftrightarrow \dfrac{3(x-1)(x+3)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}{x+3} + \dfrac{(x-1)(12-7x)}{\sqrt{12-7x}} = (x-1)(16x+27)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}-16x-24\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}-16x-24=0(*) \end{array}\right.$

PT$(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}=9(x+4)-(12-7x)$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}\right)\left(1-3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}=1+\sqrt{12-7x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{12-7x}=16x+23$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{16}{23} \le x \le \dfrac{12}{7} \\ 256x^2+764x+481=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-191+3\sqrt{633}}{128}$

Phương trình có hai nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{-191+3\sqrt{633}}{128}$

Chọn A

Giải phương trình_Nguyễn Quốc Pháp_ nguyenquocphapcr@gmail.com

Câu 12. Cho phương trình :$9x^2-2\sqrt{x^2-x-1}=3x\sqrt{8x^2+x+5}-4$. Biết phương trình có một nghiệm được biểu diễn dưới dạng: $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ trong đó $a;b;c \in N;(a;c)=1$. Tính : $P=a+b+c$ bằng :

A. $P=22$. **B.** $P=23$. **C.** $P=24$. **D.** $P=25$.

Tác giả :Nguyễn Quốc Pháp,Tên FB: Phap Pomilk Nguyen

Lời giải

Chọn C

Điều kiện : $x^2-x-1\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x\ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Khi đó, phương trình :

$$9x^2-2\sqrt{x^2-x-1}=3x\sqrt{8x^2+x+5}-4$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-3x\sqrt{8x^2+x+5}+4-2\sqrt{x^2-x-1}=0$$
$$\Leftrightarrow 18x^2-6x\sqrt{8x^2+x+5}+8-4\sqrt{x^2-x-1}=0$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-2.3x\sqrt{8x^2+x+5}+8x^2+x+5+x^2-x-1-4\sqrt{x^2-x-1}+4=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{8x^2+x+5}-3x\right)^2+\left(\sqrt{x^2-x-1}-2\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{8x^2+x+5}-3x=0\\ \sqrt{x^2-x-1}-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{8x^2+x+5}=3x\\ \sqrt{x^2-x-1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-5=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

So với điều kiện, $x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ nhận $\to a=1; b=21; c=2 \Rightarrow P=24 \to$ Chọn C

Email: thantaithanh@gmail.com

Câu 13. Biết rằng phương trình: $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$ có các nghiệm $x_1=a,\ x_2=-\dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{c-\sqrt{d}}{e}}$ trong đó $a\in\mathbb{Z},$ còn $b,\ c,\ d,\ e$ là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức: $T=a+b+c+d+e$ là:

A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 17.

Tác giả : Nguyễn Trung Thành,Tên FB: https://www.facebook.com/thantaithanh

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình tương đương với

$$\sqrt{1-x}=1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x=1+4x^4+4x^2(1-x^2)-4x^2-4x\sqrt{1-x^2}+8x^3\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Xét (1), đặt $y=\sqrt{1-x^2}$, suy ra $y\ge 0$ và $x^2=1-y^2$. (1) trở thành: $1-4y+8y(1-y^2)=0$

$\Leftrightarrow 8y^3-4y-1=0 \Leftrightarrow (2y+1)(4y^2-2y-1)=0$, vì $y\ge 0$ nên $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Từ đó suy ra $x=\pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x=0$ và $x=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Nên $a=0,\ b=e=2,\ c=d=5$. Do đó $T=0+2+5+5+2=14$.

Email: nvthang368@gmail.com

Câu 14. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$ có dạng $\dfrac{a\sqrt{b}+c}{d}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{a}{d}$ tối giản và b < 10. Tính a + b + c + d

A. 14. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 15.

Tác giả : Nguyễn Văn Thắng,Tên FB: Nguyễn Thắng

Lời giải

Chọn A

ĐK: -2 $\le x\le$ 2 (*)

Ta có: $12x-8 = 2[(\sqrt{2x+4})^2-(2\sqrt{2-x})^2]=2(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x})(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x})$

Pt đã cho $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x})(2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}-\sqrt{9x^2+16})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=0 & (1)\\ 2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}-\sqrt{9x^2+16}=0 & (2)\end{array}\right.$$

(1) giải ra được $x=\dfrac{2}{3}$(thỏa mãn (*))

Giải (2): (2) $\Leftrightarrow 48-8x+16\sqrt{8-2x^2}=9x^2+16$

$\Leftrightarrow 4(8-2x^2)+16\sqrt{8-2x^2}-x^2-8x=0$

Đặt $t = 2\sqrt{8-2x^2} \geq 0$ ta được: $t^2 + 8t - x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = x & (3) \\ t = -x-8 & (4) \end{array}\right.$

(3) giải ra được: $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn (*))

Giải (4): (4) $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{8-2x^2} + x + 8 = 0$ vô nghiệm do (*)

Vậy tổng các nghiệm của pt đã cho là: $\dfrac{4\sqrt{2}+2}{3} = \dfrac{2(\sqrt{8}+1)}{3}$ nên a = 2, b = 8, c = 1, d = 3

$\Rightarrow$ a + b + c + d = 14

Email: ***phAmhongquAngltv@gmAil.Com***

Câu 15. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $4(2x^2+1)+3(x^2-2x).\sqrt{2x-1} = 2(x^3+5x)$ Khi đó:

A. 2. **B.**. 6 **C.** 8. **D.** 10

Tác giả : Phạm Hồng Quang,Tên FB: Quang Phạm

Lời giải :

Chọn D

Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$3x(x-2)\sqrt{2x-1} = 2(x^3-4x^2+5x-2)$$
$$\Leftrightarrow 3x(x-2)\sqrt{2x-1} = 2(x-2)(x^2-2x+1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 3x\sqrt{2x-1} = 2(x^2-2x+1), (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) tương đương với:

$$2(2x-1)+3x\sqrt{2x-1}-2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2.\frac{2x-1}{x^2}+3.\frac{\sqrt{2x-1}}{x}-2 = 0, \ (**)$$

Đặt $t = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}, t \geq 0$ .Khi đó phương trình (**) trở thành:

$$2t^2+3t-2 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, t \geq 0.$$

Suy ra $x^2-8x+4=0 \Leftrightarrow x=4\pm 2\sqrt{3}$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy $S=2+(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})=10$.

Email: lucminhtan@gmail.com

Câu 16. Trong các nghiệm của phương trình $-3x^2+x+3+\left(\sqrt{3x+2}-4\right)\sqrt{3x-2x^2}+\left(x-1\right)\sqrt{3x+2}=0$ có một nghiệm có dạng $x=a+b\sqrt{13}\left(a,b\in\mathbb{Q},b>0\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=a.x^2+bx+13$

A. $\dfrac{1559}{120}$. **B.** $-\dfrac{1}{10}$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** 13.

Lời giải

Tác giả : Minh Tân,Tên FB: thpt tuyphong

Chọn A

ĐK: $0\le x\le\dfrac{3}{2}$

$$pt\Leftrightarrow -3x^2+5x-1+\left(\sqrt{3x+2}-4\right)\left(\sqrt{3x-2x^2}-\left(1-x\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2+5x-1+\frac{\left(\sqrt{3x+2}-4\right)\left(-3x^2+5x-1\right)}{\sqrt{3x-2x^2}+1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(-3x^2+5x-1\right)\left[1+\frac{\sqrt{3x+2}-4}{\sqrt{3x-2x^2}+1-x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3x^2+5x-1=0\\ 1+\dfrac{\sqrt{3x+2}-4}{\sqrt{3x-2x^2}+1-x}=0\end{array}\right.\ (1)$$

* Ta có: $1+\dfrac{\sqrt{3x+2}-4}{\sqrt{3x-2x^2}+1-x}=\dfrac{\sqrt{3x-2x^2}-x-3}{\sqrt{3x-2x^2}+1-x}$

Xét $\begin{cases}\sqrt{3x-2x^2}\ge 0\\ x+3>0\end{cases}$ và

$$3x-2x^2-\left(x+3\right)^2=-3x^2-3x-9<0\Rightarrow\sqrt{3x-2x^2}<x+3\Rightarrow\sqrt{3x-2x^2}-\left(x+3\right)<0$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6} \end{array}\right.$

Suy ra $\begin{cases} a=\dfrac{5}{6} \\ b=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

Hàm số có phương trình: $y=\dfrac{5}{6}x^2+\dfrac{1}{6}x+13$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1559}{120}$ tại $x=-\dfrac{1}{10}$.

Email: Phungthan.ddn@gmail.com

Câu 17. Phương trình $x=\sqrt{2019x-\dfrac{2019}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2019}{x}}$ có nghiệm $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}, a,b,c\in N$ và $\dfrac{a}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{(a+c)^2-b}{4}$ là

A. 2017 **B.** 2018 **C.** 2019 **D.** 2020

Tác giả : Phùng Văn Thân,Tên FB: Thân Phùng

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Điều kiện $x\in[-1;0)\cup[2019;+\infty)$

Trường hợp 1: $x\in[-1;0)$ Vế trái âm vế phải dương nên phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x\in[2019;+\infty)$

Ta có $\sqrt{2019x-\dfrac{2019}{x}}=\sqrt{2019\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}\le\dfrac{2019+x-\dfrac{1}{x}}{2}$

$\sqrt{1-\dfrac{2019}{x}}=\sqrt{\dfrac{1}{x}(x-2019)}\le\dfrac{\dfrac{1}{x}+x-2019}{2}$

Suy ra $\sqrt{2019x-\dfrac{2019}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2019}{x}}\le x$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 2019 = x - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{x} = x - 2019 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2019 + \sqrt{4076365}}{2}$ ta có $a = 2019, b = 4076365, c = 2$

Vậy $P = 2019$ chọn C

Cách 2

Điều kiện $x \in [-1;0) \cup [2019;+\infty)$

Trường hợp 1: $x \in [-1;0)$ Vế trái âm vế phải dương nên phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x \in [2019;+\infty)$

Phương trình trở thành

$$x - \sqrt{1 - \frac{2019}{x}} = \sqrt{2019x - \frac{2019}{x}}$$
$$\Rightarrow x^2 - 2019x - 2\sqrt{x^2 - 2019x} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - 2019x} - 1\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2019x = 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{2019 + \sqrt{4076365}}{2}$$

Kiểm tra lại $x = \dfrac{2019 + \sqrt{4076365}}{2}$ là nghiệm phương trình. Ta có $a = 2019, b = 4076365, c = 2$

Vậy $P = 2019$ chọn C

Email: huunguyen1979@gmail.com

Câu 18. Biết $x = a + b\sqrt{5}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình :

$\sqrt[3]{x^3 + 10x^2 + 56x + 66} - x = 2\left(\sqrt{x^2 - 4x - 1} + 2\right)$. Tính $T = a^3 + b^3$?

A. $T = 9$. **B.** $T = 8$. **C.** $T = 7$. **D.** $T = 125$.

Lời giải

Họ và tên : Đào Hữu Nguyên,Tên FB: Đào Hữu Nguyên

Chọn C

Điều kiện : $x^2-4x-1\ge 0$ (1)

Ta có $\sqrt[3]{x^3+10x^2+56x+66}=2\sqrt{x^2-4x-1}+4+x$

Do $\sqrt{x^2-4x-1}\ge 0$ nên $\sqrt[3]{x^3+10x^2+56x+66}\ge 4+x \Leftrightarrow x^3+10x^2+56x+66\ge 64+48x+12x^2+x^3$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1\le 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x^2-4x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{5} \\ x=2+\sqrt{5} \end{array}\right.$. Vậy $T=7$

Email: huunguyen1979@gmail.com

Câu 19. Biết phương trình : $8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1}$ có 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 $(x_1<x_2<x_3)$.

Tính $T=x_1+(\sqrt{7}+1)x_2+x_3$?

A. $T=\dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$. **B.** $T=\dfrac{3}{2}$. **C.** $T=3$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Họ và tên : Đào Hữu Nguyên,Tên FB: Đào Hữu Nguyên

Chọn C

Điều kiện : $2x^2-3x+1\ge 0$

$Pt\Leftrightarrow 8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1}\Leftrightarrow 4(x-\sqrt{2x^2-3x+1})^2=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2x^2-3x+1}=1 \\ 2\sqrt{2x^2-3x+1}=4x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4} \\ x=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4} \end{array}\right.$

Vậy $T=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}+\left(\sqrt{7}+1\right)\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}=3$

Email: vannguyen300381@gmail.com

Câu 20. Biết rằng phương trình $12x^2-8x+3=(2x-1)\sqrt{40x^3-8x^2+6x}$ (1) có một nghiệm dạng $x=\dfrac{a+\sqrt[3]{c}}{b}$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Hãy tính tổng $S=a+b+c$

A. $S=5$. **B.** $S=2$ **C.** $S=26$. **D.** $S=-8$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị Vân,Tên FB: Vân Nguyễn Thị

Chọn A

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 12x^2-8x+3=(2x-1)\sqrt{2x(20x^2-4x+3)}$

ĐK: $x\ge 0$

TH1: $x=0$: Không thỏa mãn

TH2: $x>0$ ta có

$$12x^2-8x+3=(2x-1)\sqrt{2x(20x^2-4x+3)}$$
$$\Leftrightarrow 20x^2-4x+3-8x^2-4x=(2x-1)\sqrt{2x(20x^2-4x+3)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{20x^2-4x+3}{2x}-(2x-1)\sqrt{\frac{20x^2-4x+3}{2x}}-4x-2=0$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{20x^2-4x+3}{2x}}, t\ge 0$, ta có phương trình:

$$t^2-(2x-1)t-4x-2=0\Leftrightarrow (t-2x-1)(t+2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2x+1 \\ t=-2(l) \end{array}\right.$$

Với $t=2x+1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{20x^2-4x+3}{2x}}=2x+1$$
$$\Leftrightarrow 20x^2-4x+3=2x(2x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-3=0$$
$$\Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=2$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^3=2\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt[3]{2}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện $x>0$ ta có $x=\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{2}$ là nghiệm của phương trình

Vậy $S = a + b + c = 5$

Gmail: thAnhnguyetDp1@gmail.com

Câu 21. Cho phương trình: $\sqrt{x - 2018\sqrt{x} + 2018} + \sqrt{x - 2019\sqrt{x} + 2019} = \sqrt[4]{x} + 1$

Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình trên thì :

A. $S \in [2018;\ 2019]$ **B.** $S \in [2019;\ 2020]$

C. $S \in [2018^2;\ 2019^2]$ **D.** $S \in [2019^2;\ 2020^2]$

Họ và tên : Nguyễn Thị Thanh Nguyệt FB: Nguyễn Thị Thanh Nguyệt

Lời giải

Chọn C

ĐK: $\begin{cases} x - 2018\sqrt{x} + 2018 \ge 0 \\ x - 2019\sqrt{x} + 2019 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Đặt $a = \sqrt{x - 2018\sqrt{x} + 2018} \ge 0$ và $b = \sqrt{x - 2019\sqrt{x} + 2019} \ge 0$

Ta có: $\begin{cases} a + b = \sqrt[4]{x} + 1 \\ a^2 - b^2 = \sqrt{x} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt[4]{x} + 1 \\ (\sqrt[4]{x} + 1)(a - b) = \sqrt{x} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt[4]{x} + 1 \\ a - b = \sqrt[4]{x} - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2019\sqrt{x} + 2019} = 1$

$\Leftrightarrow x - 2019\sqrt{x} + 2018 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 2018 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad (n) \\ x = 2018^2 \ (n) \end{array}\right.$

Thử lại: Với x= 1 thay vào PT: 1+1=1+1 thoả

Với $x = 2018^2$ thay vào PT: $\sqrt{2018} + 1 = \sqrt[4]{2018^2} + 1$: thoả

Vậy $S = 1 + 2018^2$. Chọn C

Gmail: tuongAnh0209@gmAil.Com.

Câu 22. Nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = \left(x^3 + x\right)\sqrt{\dfrac{1}{x} - x}$ có dạng $a + \sqrt{b}$, $a \in Z, b \in N$. Tính $a.b$?

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -4.

Tác giả: Nguyễn Ngọc Thảo –Tên FB: Nguyễn Ngọc Thảo.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ 0 < x \le 1 \end{array}\right.$

Ta có $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = \left(x^3 + x\right)\sqrt{\frac{1}{x} - x} \Leftrightarrow \left(x^3 + x\right)\sqrt{\frac{1}{x} - x} = \left(x^2 + x\right)^2 + \left(x - 1\right)^2$

Nên suy ra $x\sqrt{\frac{1}{x} - x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Ta có $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = \left(x^3 + x\right)\sqrt{\frac{1}{x} - x} \Leftrightarrow \left(x^2 + 1\right)^2 - 2\left(x - x^3\right) = \left(x^2 + x\right)\sqrt{x - x^3}$.

Đặt $a = x^2 + 1, b = \sqrt{x - x^3}, a > 0, b \ge 0$

PTTT $a^2 - ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b).(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow a = 2b$

$a = 2b \Rightarrow x^2 + 1 = 2\sqrt{x}\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x\left(1 - x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + 2x - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1 + \sqrt{2}$

Email: phamkhacthanhkt@gmail.com.

Câu 23. Giải phương trình $x\sqrt{2y - 1} + 4y\sqrt{x - 1} = 3xy$ ta được nghiệm duy nhất $\left(x_0;\, y_0\right)$. Giá trị của biểu thức $P = x_0^2 - 2y_0^3$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-4;0)$. **B.** $(1;6)$. **C.** $(6;10)$. **D.** $(-9;-5)$.

Tác giả: Phạm Khắc Thành,Tên FB: Thanh Phamkhac

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Điều kiện: $x \ge 1; y \ge \frac{1}{2}$.

Ta có: $x\sqrt{2y-1}+4y\sqrt{x-1}=-2y\left(x-2\sqrt{x-1}\right)-\frac{1}{2}x\left(2y-2\sqrt{2y-1}\right)+3xy$

$=-2y\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{2y-1}-1\right)^2+3xy$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x\ge 1;\ y\ge \frac{1}{2} \\ 2y\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\frac{1}{2}x\left(\sqrt{2y-1}-1\right)^2=0 \end{cases}$.

Từ đó ta được nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$. Vậy $P=2$

Cách 2: Điều kiện: $x\ge 1; y\ge \frac{1}{2}$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\sqrt{x-1}=\sqrt{1.\left(x-1\right)}\le \frac{1+\left(x-1\right)}{2}=\frac{x}{2}$

$\sqrt{2y-1}=\sqrt{1.\left(2y-1\right)}\le \frac{1+\left(2y-1\right)}{2}=y$. Do đó $x\sqrt{2y-1}+4y\sqrt{x-1}\le 3xy$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Từ đó ta được nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$. Vậy $P=2$

Email: **Ngocchigvt@gmail.com**

Câu 24. Cho phương trình $\frac{3\left(x^2+2x-3\right)}{\sqrt{x+4}-1}-\frac{7x^2-19x+12}{\sqrt{12-7x}}=16x^2+11x-27$ có hai nghiệm $x=a$ và $x=\frac{-b+c\sqrt{d}}{e}$ với $a,b,c,d,e\in N$, c là số nguyên tố và $\frac{b}{e}$ là phân số tối giản. Khi đó hệ thức nào sau đây đúng ?

A. $2\left(b+e-a\right)=c+d$. **B.** $2\left(b+e+a\right)=c+d$. **C.** $b+e-a=c+d$. **D.** $b+e+a=c+d$.

Tác giả : **Nguyễn Ngọc Chi,** ***Tên FB:*** **Nguyễn Ngọc Chi**

Lời giải

Chọn A

Đk: $\begin{cases} -4\le x<\frac{12}{7} \\ x\ne -3 \end{cases}$

Ptrình $\Leftrightarrow \frac{3\left(x-1\right)\left(x+3\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}{x+3}+\frac{\left(x-1\right)\left(12-7x\right)}{\sqrt{12-7x}}=\left(x-1\right)\left(16x+27\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}-16x-24\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}-16x-24=0(*) \end{array}\right.$

PT$(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}=9(x+4)-(12-7x)$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}\right)\left(1-3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}=1+\sqrt{12-7x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{12-7x}=16x+23$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{16}{23}\le x\le \dfrac{12}{7} \\ 256x^2+764x+481=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-191+3\sqrt{633}}{128}$

Phương trình có hai nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{-191+3\sqrt{633}}{128}$

Chọn A

Gmail: nvpmaster0808@gmail.com

Câu 25. Cho phương trình: $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$. Gọi S là tổng bình phương các nghiệm thực của phương trình. Tính S.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Tác giả: Nguyễn Văn Phùng ***Tên FB: Phùng Nguyễn***

Lời giải

Chọn C

Ta dự đoán được nghiệm $x=\pm 1$, và ta viết lại phương trình như sau:

$3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)=\left(\sqrt{x^2+15}-4\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=1 & (1) \\ \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Giải phương trình (2). Vì

$$\frac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}>0$$

$$\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8} \Rightarrow \sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x=1, x=-1$. Suy ra $S=1^2+(-1)^2=2$.

Email: Tinh.danlapts@gmail.com

Câu 26. Trong các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^4+3x^3+12x^2+15x+10}-\dfrac{3x^2+3x+1}{2}=3$, có nghiệm dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a, b, c là số nguyên, c > 0, $\dfrac{a}{c}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=-5$ **B.** $T=20$ **C.** $T=8$ **D.** $T=-2$

Lời giải

Chọn B

Sử dụng cách phân tích $2x^4+3x^3+12x^2+15x+10=(2x^2+ax+2)(x^2+bx+5) \Rightarrow a=3; b=0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{(2x^2-3x+2)(x^2+5)}=3x^2+3x+7$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x^2-3x+2)(x^2+5)}=(2x^2-3x+2)+(x^2+5)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+5}\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+5}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x+2=x^2+5 \Leftrightarrow x^2+3x-3=0$$

$\sqrt{(2x^2+3x+2)(x^2+5)}=\dfrac{3x^2+3x+7}{2}=\dfrac{(2x^2+3x+2)+(x^2+5)}{2}$.

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+5}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+5}$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+2=x^2+5\Leftrightarrow x^2+3x-3=0$.

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}; x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$

Suy ra T = 20.

Gmail: tuonganh0209@gmail.com.

Câu 27. Cho $f\left(x\right)=x^3-3x^2-6x+1$. Phương trình $\sqrt{f\left(f\left(x\right)+1\right)+1}=f\left(x\right)+2$ có số nghiệm thực là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Tác giả: Nguyễn Ngọc Thảo –,Tên FB: Nguyễn Ngọc Thảo.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=f\left(x\right)+1\Rightarrow t=x^3-3x^2-6x+2$.

Khi đó $\sqrt{f\left(f\left(x\right)+1\right)+1}=f\left(x\right)+2$ trở thành:

$\sqrt{f\left(t\right)+1}=t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ f\left(t\right)+1=t^2+2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^3-4t^2-8t+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}t=t_1\in\left(-2;-1\right)\\ t=t_2\in\left(-1;1\right)\\ t=t_3\in\left(1;6\right)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_2\in\left(-1;1\right)\\ t=t_3\in\left(5;6\right)\end{array}\right.$.

(Vì $g\left(t\right)=t^3-4t^2-8t+1$; $g\left(-2\right)=-7$; $g\left(-1\right)=4$; $g\left(1\right)=-10$; $g\left(6\right)=25$).

Xét phương trình $t=x^3-3x^2-6x+2$, là pt hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-6x+2$ và đường thẳng $y=t$. Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1-\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-6+6\sqrt{3}$	↘	$-6-6\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

+ Với $t=t_2\in(-1;1)$, ta có d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt, nên phương trình có 3 nghiệm.

+ Với $t=t_3\in(5;6)$, ta có d cắt (C) tại 1 điểm, nên phương trình có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

VDC PT-HPT CHỨA CĂN

VẤN ĐỀ 4-1. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Email: themhaitotoanyp1@gmail.com

Câu 1. Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình : $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m-1=0$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của S = 2019b - 2020a - 172 là :

A. 1918. **B.** 1819. **C.** 1981. **D.** 2019.

Tác giả : Lưu Thị Thêm,Tên FB: Lưu Thêm

Lời giải

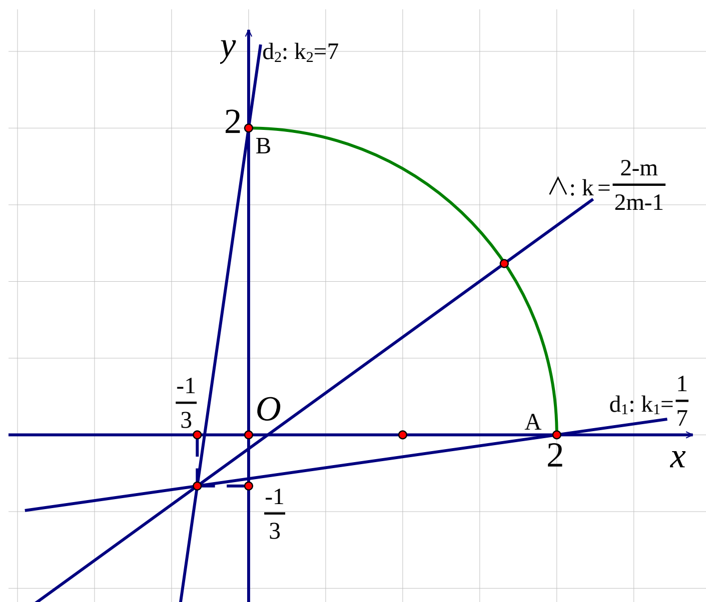
Chọn C.

+) $(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m-1=0$, điều kiện $-3\le x\le 1$

+) Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+3} \\ b=\sqrt{1-x} \end{cases}$, $0\le a,b\le 2$

+) Ta có : $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ (m-2)a+(2m-1)b+m-1=0 \end{cases}$ (I)``

+) Trong hệ tọa độ Oab, phương trình $a^2+b^2=4$ là phương trình đường tròn tâm O bán kính $R=2$, và phương trình $(m-2)a+(2m-1)b+m-1=0$ là phương trình đường thẳng Δ có hệ số góc $k=\dfrac{2-m}{2m-1}$ (vì với $m=\dfrac{1}{2}$ thì phương trình vô nghiệm).



+) Nhận xét thấy Δ đi qua điểm $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ cố định.

+) Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta$ nằm trong miền góc nhọn tạo bởi d_1, d_2

+) $\overrightarrow{IA}\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right) \Rightarrow d_1$ có hệ số góc $k_1 = \frac{1}{7}$.

+) $\overrightarrow{IB}\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right) \Rightarrow d_2$ có hệ số góc $k_2 = 7$.

+) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k_1 \le k \le k_2 \Leftrightarrow \frac{1}{7} \le \frac{2-m}{2m-1} \le 7 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \le m \le \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases}$

S = 2019b - 2020a - 172 = 1981.

Email: themhAitotoAnyp1@gmAil.Com.

Có thể giải cách khác như sau: PT $\Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{1-x}+1}$ (2).

Vì $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4$ nên đặt $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\sin\alpha \\ \sqrt{1-x} = 2\cos\alpha \end{cases} \left(\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

(2) trở thành: $m = \frac{4\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1}{2\sin\alpha + 4\cos\alpha + 1} = \frac{4.\frac{2t}{1+t^2} + 2.\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}{2.\frac{2t}{1+t^2} + 4.\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \frac{-t^2 + 8t + 3}{-3t^2 + 4t + 5} = \frac{1}{3} + \frac{20t+4}{3\left(-3t^2+4t+5\right)}$

(với $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}\left(t\in[0;1]\right)$). Xét $f(t)=\dfrac{20t+4}{-3t^2+4t+5}$ trên đoạn $[0;1]$ được:

$f'(t)=\dfrac{60t^2+24t+84}{(-3t^2+4t+5)^2}>0,\forall t\in[0;1]$. Suy ra

$f(0)\le f(t)\le f(1)\Leftrightarrow\dfrac{4}{5}\le f(t)\le 4\Rightarrow\dfrac{4}{15}\le\dfrac{f(t)}{3}\le\dfrac{4}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{15}\le\dfrac{1}{3}+\dfrac{f(t)}{3}\le\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}\Rightarrow\dfrac{3}{5}\le m\le\dfrac{5}{3}$ Đến đây giống cách trên.

Câu 2. Gọi T là tập các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{16x+m-4}=4x^2-18x+4-m$ có 1 nghiệm. Tính tổng các phần tử của T.

A. 0. **B.** 20. **C.** -20. **D.** 10.

Tác giả : Lưu Thị Thêm,Tên FB: Lưu Thêm

Lời giải

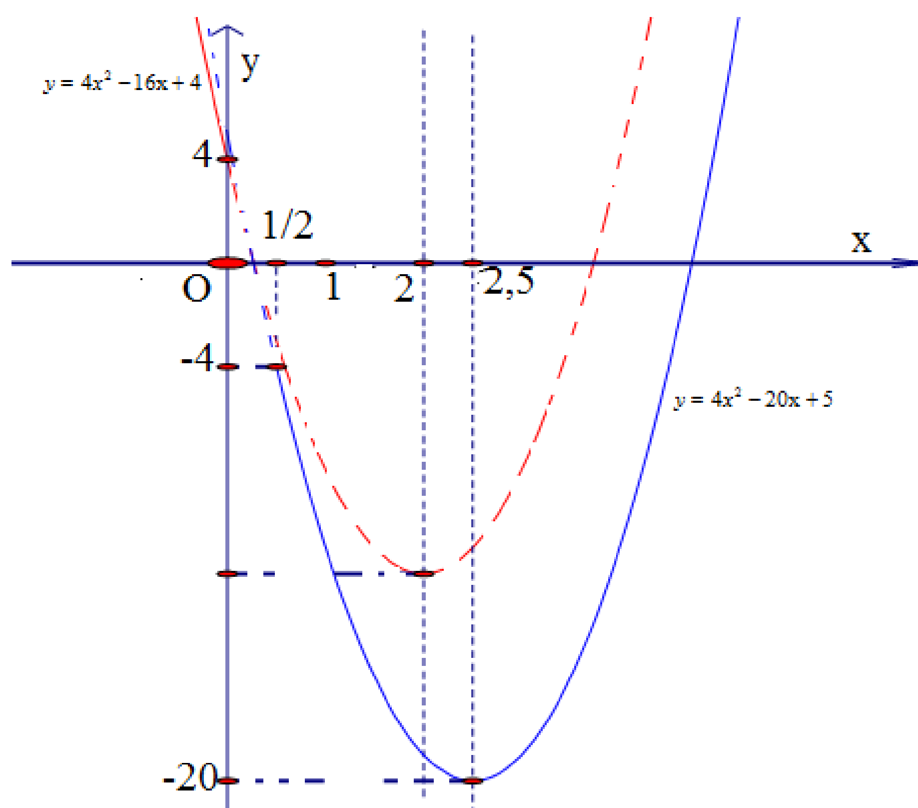
Chọn C

Đặt t = $\sqrt{16x+m-4},t\ge 0$. Ta có m = t^2 - 16x + 4

Phương trình trở thành: $t=4x^2-18x+4-\left(t^2-16x+4\right)\Leftrightarrow 4x^2-t^2=2x+t$

$$\Leftrightarrow(2x+t).(2x-t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2x\\t=2x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{16x+m-4}=-2x\\\sqrt{16x+m-4}=2x-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\m=4x^2-16x+4\end{cases}\\\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\m=4x^2-20x+5\end{cases}\end{array}\right.$$



Từ đồ thị, phương trình có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < m < 4 \\ m = -20 \end{array}\right.$

Do m thuộc Z nên $T = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;-20\}$. Chọn C

Email: maimai1.hn@gmail.com

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{x}} + \sqrt{m-\sqrt{x}} = m$ có nghiệm ?

A. 2 **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Tác giả: Trần Tuyết Mai Tên FB: Mai Mai

Chọn C

ĐKXĐ: $\begin{cases} m+\sqrt{x} \ge 0 \\ m-\sqrt{x} \ge 0 \\ m \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ x \ge 0 \\ \sqrt{x} \le m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ 0 \le x \le m^2 \end{cases}$.

+ Khi $m = 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

+ Khi $m > 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow m+\sqrt{x}+m-\sqrt{x}+2\sqrt{m^2-x} = m^2$

$$\Leftrightarrow 2m+2\sqrt{m^2-x}=m^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-x}=m^2-2m \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m\ge 0 \\ 4\left(m^2-x\right)=\left(m^2-2m\right)^2 \end{cases} (*)$$

Do điều kiện $m>0$ nên $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2 \\ 4\left(m^2-x\right)=m^4-4m^3+4m^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2 \\ -4x=m^4-4m^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2 \\ x=\dfrac{m^3\left(4-m\right)}{4} \end{cases}.$$

Do điều kiện $0\le x\le m^2$ nên phương trình có nghiệm khi:

$$\begin{cases} m\ge 2 \\ \dfrac{m^3\left(4-m\right)}{4}\ge 0 \\ \dfrac{m^3\left(4-m\right)}{4}\le m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2 \\ m\le 4 \\ \left(m-2\right)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le m\le 4.$$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $m=0$ hoặc $2\le m\le 4$. Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Email: tc_ngduychien2006@yahoo.com

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để phương trình $\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}-3\sqrt[3]{x^2+1}+1-m=0$ có nghiệm.

A. $m=-\dfrac{3}{4}$.. **B.** $m=-\dfrac{5}{4}$. **C.** $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=\dfrac{5}{4}$.

Tác giả : Nguyễn Duy Chiến,Tên FB: Nguyễn Duy Chiến

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1}, t\ge 1 \Rightarrow t^2=\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}$

Ta được phương trình $t^2-3t+1-m=0 \Leftrightarrow t^2-3t+1=m$

Xét hàm số $y=t^2-3t+1, t\ge 1$

Bảng biến thiên

t	1		$\frac{3}{2}$		
y	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $m \ge -\frac{5}{4}$

Email: thachtv.tc3@nghean.edu.vn

Câu 5. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên dương và nhỏ hơn 2020 để phương trình $2\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+m}}}=m$ có các nghiệm đều dương?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2015. **D.** 2014.

Lời giải

(Tác giả: Trịnh Văn Thạch – FB.com/thachtv.tc3)

Chọn C

Ta chỉ cần xét trường hợp $x>0$ và $m>0$. Khi đó các biểu thức vế trái đều xác định.

Đặt $y=2\sqrt{x+2\sqrt{x+m}}$ và $z=2\sqrt{x+m} \Rightarrow y,z>0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x+y}=m \\ 2\sqrt{x+z}=y \\ 2\sqrt{x+m}=z \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m \ge y \ge z$

$\Rightarrow 2\sqrt{x+z} \le 2\sqrt{x+y} \le 2\sqrt{x+m} \Rightarrow y \le m \le z \Rightarrow m=y=z$

Thay $m=y=z$ vào hệ trên ta được: $2\sqrt{x+m}=m \Leftrightarrow 4x+4m=m^2 \Leftrightarrow x=\frac{m^2-4m}{4}$

Để có $x>0 \Rightarrow m^2-4m>0 \Rightarrow m>4 \Rightarrow m=5,6,7...,2019$.

Như vậy có tất cả 2015 giá trị m thỏa mãn yêu cầu của đề ra.

Email: *quAngtv.C3kl@gmAil.Com*

Câu 6. Cho phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m^2-x^2}}.\left(\sqrt{(m-x)^3}+\sqrt{(m+x)^3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2m-\sqrt{m^2-x^2}\right)$, với m là tham số thực. Gọi P tổng tất các các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm nguyên. Tìm P.

A. $P=0$ **B.** $P=\frac{1}{4}$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=4$

Lời giải

Tác giả: Trương Văn Quắng ***Tên FB: OcQuang***

Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\ge -m \\ x\le m \\ m+\sqrt{m^2-x^2}\ge 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{2m+2\sqrt{m^2-x^2}}.\left(\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right)\left(2m-\sqrt{m^2-x^2}\right)=\left(2m-\sqrt{m^2-x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2m-\sqrt{m^2-x^2}=0 & (1) \\ \sqrt{2m+2\sqrt{m^2-x^2}}.\left(\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right)=1 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{m^2-x^2}=2m\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 0 \\ m^2-x^2=4m^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 0 \\ x^2=-3m^2 \end{cases}$$

Do x nguyên nên ta suy ra được: $x=0;m=0$ (Thỏa mãn PT đã cho)

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right)^2}\left(\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right)=1\Leftrightarrow \left|\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right|\left(\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right)=1$$

$$\left(\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}\right)^2=1\Leftrightarrow 2m+2\sqrt{m^2-x^2}=1\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m\ge 0 \\ 4\left(m^2-x^2\right)=(1-2m)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{1}{2} \\ x^2=m-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Do x nguyên nên ta suy ra được: $x=0;m=\frac{1}{4}$ (Thỏa mãn PT đã cho). Vậy $P=\frac{1}{4}$.

Câu 7. Cho phương trình $\left(x^2-3x-4\right)\sqrt{x+7}-m\left(x^2-3x-4-\sqrt{x+7}\right)-m^2=0$. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình có số nghiệm thực nhiều nhất.

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Tác giả : Hoàng Dũng,Tên FB: HoangDung

ĐK: $x \ge -7$

$\left(x^2-3x-4\right)\sqrt{x+7}-m\left(x^2-3x-4-\sqrt{x+7}\right)-m^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-4+m\right)\left(\sqrt{x+7}-m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-3x-4+m=0 & (1) \\ \sqrt{x+7}=m & (2) \end{array}\right.$

Pt đã cho có nhiều nghiệm nhất khi pt (1) có hai nghiệm và pt(2) có nghiệm khác nghiệm pt (1)

$\Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$

Email: Dongpt@C3phuCtho.eDu.vn

Câu 8. Tổng các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x^2-2x-6\sqrt{x^2-2x+5}-m=0$ có nghiệm thực bằng

A. -105. **B.** -110. **C.** -115. **D.** -120.

Lời giải

Tác giả : Hoàng Tiến Đông ***Tên FB:*** **Hoàng Tiến Đông**

Điều kiện: $x^2-2x+5 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+4 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $x^2-2x-6\sqrt{x^2-2x+5}-m=0 \ (*)$.

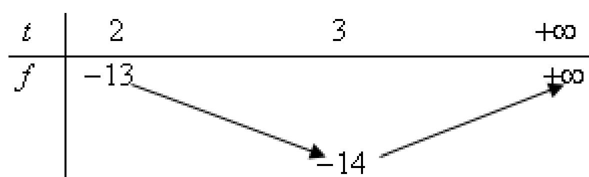
Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4} \Rightarrow t \ge 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$t^2-6t-m-5=0 \Leftrightarrow t^2-6t-5=m$.

Xét hàm số: $f=t^2-6t-5, t \in [2;+\infty)$.

Bảng biến thiên:



Phương trình $(*)$ có nghiệm $m \ge -14$.

Theo đề m là số nguyên âm nên có 14 giá trị m. Suy ra tổng các giá trị của m là -105

Phương trình chứa căn _ Trần Minh Thảo_(Email): trAnminhthAo2011@gmAil.Com

Câu 9. Cho phương trình $\sqrt{2x^2-2mx-4}=x-1$ (1) (m là tham số). Gọi p,q lần lượt là giá trị m nguyên nhỏ nhất và lớn nhất thuộc $[-10;10]$ để phương trình (1) có nghiệm. Khi đó giá trị $T=p+2q$ là

A. $T=19$.   **B.** $T=20$.   **C.** $T=10$.   **D.** $T=8$.

Lời giải

Họ và tên: Trần Thị Minh Thảo   FB:Minh Thảo Trần

Chọn A

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 2x^2-2mx-4=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-2(m-1)x-5=0(2)\end{cases}$$

Do pt(2) có $ac=-5<0$ nên pt(2) có 2 nghiệm trái dấu.

Để pt(1) có nghiệm thì pt(2) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<1\le x_2\Leftrightarrow(x_1-1)(x_2-1)\le 0$

$\Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1\le 0\Leftrightarrow -5-2(m-1)+1\le 0\Leftrightarrow m\ge -1$

Khi đó $p=-1,q=10\Rightarrow T=19$

Vậy đáp án **A.**

Tác giả: Đỗ Thế Nhất,Tên FB: Đỗ Thế Nhất

Email: nhatks@gmail.com

Câu 10. Cho phương trình $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{-x^3+5x^2}+m^4.\sqrt{x-1}-8\sqrt{2m-1}+6=0$(m là tham số). Gọi S là tổng các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm. Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. $S\in(0;2)$ **B.** $S\in(2;4)$ **C.** $S\in(4;6)$ **D.** $S\in(6;8)$

Lời giải

Chọn A

Hàm số có TXĐ: $D=\{1;5\}$

TH1: Phương trình đã cho có nghiệm x=1

$\Rightarrow 2-8\sqrt{2m-1}+6=0\Leftrightarrow\sqrt{2m-1}=1\Leftrightarrow m=1$

TH2: Phương trình đã cho có nghiệm x= 5

$\Rightarrow 2m^4 - 8\sqrt{2m-1} + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(m^2 - 1\right)^2 + \left(2m - 2\right)^2 + \left(2\sqrt{2m-1} - 2\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 2m - 2 = 0 \\ 2\sqrt{2m-1} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Từ TH1 và TH2 suy ra S=1

Câu 11. Cho phương trình $\dfrac{mx\sqrt{x^4+x^3+5x^2+x+1}}{(x+1)^2} = x^2 - x + 1$(với m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thực dương là $\left[\dfrac{a}{b};+\infty\right)$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=8$

Sáng tác bởi: Đỗ Văn Cường Facebook: Cường Đỗ Văn

Lời giải

Chọn B

$\dfrac{mx\sqrt{x^4+x^3+5x^2+x+1}}{(x+1)^2} = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{mx\sqrt{x^4+x^3+5x^2+x+1}}{x^2+2x+1} = x^2 - x + 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{m\sqrt{x^2+x+5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+2+\frac{1}{x}} = x - 1 + \dfrac{1}{x}$, do $x > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} + 3}}{x + \frac{1}{x} + 2} = x + \dfrac{1}{x} - 1$

+)Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} \geq 2$

Ta có

$\Leftrightarrow \dfrac{m\sqrt{t^2+t+3}}{t+2}=t-1$

$\Leftrightarrow m\sqrt{t^2+t+3}=t^2+t-2$

+)Đặt $u=\sqrt{t^2+t+3}, u\geq 3$

Phương trình trở thành $u^2-mu-5=0(*)$

+)Phương trình đầu có nghiệm thỏa mãn đề bài

$\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $u\geq 3$

Vì ta có $a.c=-5<0$ nên (*) luôn có hai nghiệm trái dấu u_1,u_2

$\Rightarrow u_1<3\leq u_2 \Leftrightarrow (u_1-3)(u_2-3)\leq 0 \Leftrightarrow u_1u_2-3(u_1+u_2)+9\leq 0 \Leftrightarrow -5-3m+9\leq 0 \Rightarrow m\geq \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow a=4, b=3 \Rightarrow a+b=7$

Email: huynhthanhtinhspt@gmail.com

Câu 12. Biết a và b lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của m để phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}=m$ có nghiệm thực. Khi đó $(a+b)^2+2b^3$ bằng

A. 22. **B.** 24. **C.** 27. **D.** 30.

Lời giải

Họ và tên: Huỳnh Thanh Tịnh,Tên FB: huynhthanhtinh

Chọn B

- Điều kiện: $-1\leq x\leq 3$.
- Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \Rightarrow t^2=x+1+3-x+2\sqrt{(x+1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)}=\dfrac{t^2-4}{2}$

Ta có: $t^2=4+2\sqrt{(x+1)(3-x)}\geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} t\leq -2 \\ t\geq 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t\geq 2\ (1)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1 \wedge x=3$.

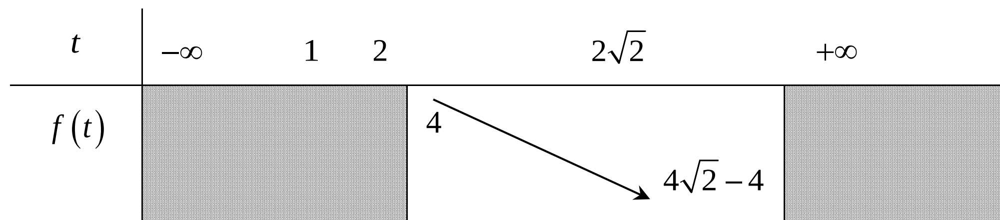
Ta lại có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \overset{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2\right]} \Leftrightarrow t\leq 2\sqrt{2}\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Phương trình trở thành $t-\dfrac{t^2-4}{2}=m \Leftrightarrow 2m=-t^2+2t+4$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+4$ trên đoạn $\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Bảng biến thiên



- Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm

$\min\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]} f(t)\le 2m\le \max\limits_{\left[2;2\sqrt{2}\right]} f(t)\Leftrightarrow 4\sqrt{2}-4\le 2m\le 4\Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2\le m\le 2$

Email: langtham313vt@gmail.com

Câu 13. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x+m+(1-x)\sqrt{2x+m}=0$ có 2 nghiệm phân biệt là nửa khoảng $(a;b]$. Tính $S=a+b$.

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Minh Cường,Tên FB: Yen Nguyen

Chọn C

$x+m+(1-x)\sqrt{2x+m}=0$

$\Leftrightarrow 2x+m+\sqrt{2x+m}-x\sqrt{2x+m}-x=0$

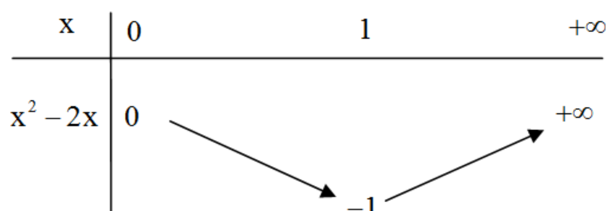
$\Leftrightarrow \sqrt{2x+m}\left(\sqrt{2x+m}+1\right)-x\left(\sqrt{2x+m}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+m}+1\right)\left(\sqrt{2x+m}-x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+m}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x=m\,(*) \end{cases}$

Ycbt $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt thoả $x\ge 0$

BBT



Suy ra $m\in(-1;0]\Rightarrow a=-1,b=0\Rightarrow S=a+b=-1$

Email: **DuCnoiDs1@gmAil.Com**

Câu 14. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2x-\sqrt{x+m}=m$ có nghiệm duy nhất là $\left\{-\frac{a}{b}\right\}\cup(-c;d)$, với a,b,c,d là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c+4d$.

A. $S=10$. **B.** $S=15$. **C.** $S=16$. **D.** $S=18$.

Lời giải

Họ và tên: **Trần Đức Nội.** Facebook: **Trần Đức Nội**

Chọn C

Gọi phương trình đã cho là (1).

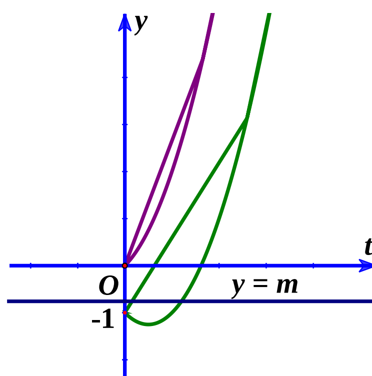
Đặt $\sqrt{x+m}=t$, điều kiện $t\ge 0$, phương trình (1) trở thành:

$$m^2+(1-2t^2)m+t^4-2t^2-t=0\ (2).$$

Giải (2) theo m ta được $\left[\begin{array}{l}m=t^2+t\\ m=t^2-t-1\end{array}\right.$ (3).

Ta thấy với mỗi giá trị $t\ge 0$, cho ta duy nhất một giá trị x, do đó (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ (3) có nghiệm duy nhất $t\in[0;+\infty)$.

Vẽ hai đồ thị hàm số $y=t^2+t$ và $y=t^2-t-1$ với $t\ge 0$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Căn cứ đồ thị ta có hệ (3) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại một điểm duy nhất, suy ra $m=-\frac{5}{4}$ hoặc $-1<m<0$.

Vậy $a=5,b=4,c=1,d=0$, do đó $S=16$.

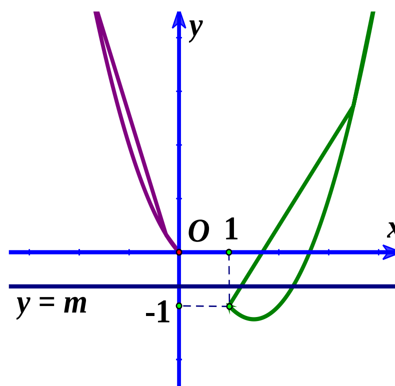
Cách 2: (của cô **Lưu Thêm**)

Gọi phương trình đã cho là (1).

$(1) \Leftrightarrow x^2 - (x+m) = \left(x+\sqrt{x+m}\right) \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+m}\right)\left(x-\sqrt{x+m}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+m}=-x\\ \sqrt{x+m}=x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ m=x^2-x\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1\\ m=x^2-3x+1\end{cases}\end{array}\right. \quad (2)$

Vẽ hai đồ thị hàm số $y=x^2-x$ với $x\le 0$ và $y=x^2-3x+1$ với $x\ge 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Căn cứ đồ thị ta có hệ (2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại một điểm duy nhất, suy ra $m=-\dfrac{5}{4}$ hoặc $-1<m<0$.

Vậy $a=5, b=4, c=1, d=0$, do đó $S=16$.

Email: DuCnoiDs1@gmAil.Com

Câu 15. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(x-2\sqrt{x-m}-2m\right)\left(x-2\sqrt{x-m}-3\right)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Họ và tên: **Trần Đức Nội.** Facebook: **Trần Đức Nội**

Chọn B

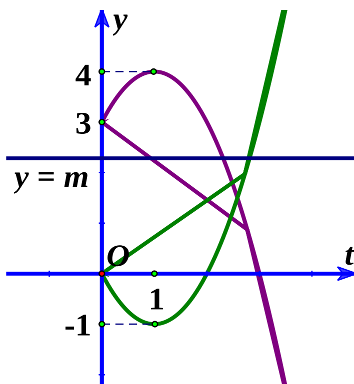
Gọi phương trình đã cho là (1).

Đặt $\sqrt{x-m}=t$, điều kiện $t\ge 0$, phương trình (1) trở thành:

$$\left(t^2-2t-m\right)\left(t^2-2t-3+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=t^2-2t\\ m=-t^2+2t+3\end{array}\right. \quad (2).$$

Ta thấy với mỗi giá trị $t \ge 0$, cho ta duy nhất một giá trị x, do đó (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Vẽ hai đồ thị hàm số $y = t^2 - 2t$ và $y = -t^2 + 2t + 3$ với $t \ge 0$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Căn cứ đồ thị ta có hệ (2) đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại 2 điểm phân biệt. Suy ra $m = -1$, $m = 4$ hoặc $m \in (0;3) \setminus \left\{ \dfrac{2+\sqrt{10}}{2} \right\}$.

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{-1;1;2;4\}$.

Email: DuCnoiDs1@gmAil.Com

Câu 16. Tìm số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2 - mx + 1}$ có nghiệm.

A. 8. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 21.

Lời giải

Họ và tên: **Trần Đức Nội.** Facebook: Trần Đức Nội

Đề bài lấy của cô Bạch Dương trên Diễn Đàn Giáo Viên Toán

Chọn B

Gọi phương trình đã cho là (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2x-1 = x^2 - mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2 - (m+2)x + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta thấy $(2) \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = mx$ nên nếu (2) có nghiệm $x \ge \dfrac{1}{2}$ thì $m > 0$.

Ta thấy nếu (2) có nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = m + 2 > 2$ nên (2) luôn có ít nhất một nghiệm $x \ge \dfrac{1}{2}$. Do đó (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (m+2)^2 - 8 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge -2 + 2\sqrt{2} \\ m \le -2 - 2\sqrt{2} \end{array} \right.$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq -2+2\sqrt{2}$.

Do m nguyên và thuộc đoạn $[-10;10]$ nên $m \in \{1;2;...;10\}$, do đó có 10 giá trị của m thỏa mãn.

Cách 2: (Của thầy **Lâm le Van**)

Gọi phương trình đã cho là (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = x^2 - mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ m = \dfrac{x^2-2x+2}{x} \quad (2) \end{cases}$$

Với $x>0$ ta có $\dfrac{x^2-2x+2}{x} = x + \dfrac{2}{x} - 2 \geq 2\sqrt{x.\dfrac{2}{x}} - 2 = 2\sqrt{2}-2$, đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt{2} > \dfrac{1}{2}$.

Do đó (2) có nghiệm $x \geq \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $m \geq 2\sqrt{2}-2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \geq 2\sqrt{2}-2$.

Email: phamvanthuan1981@gmail.com

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \dfrac{8}{3}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Tác giả : Phạm Văn Thuấn,Tên FB: Pham Van Thuan

Chọn C

Đk : $-5<x<5$

Đặt $\sqrt{5-x} = u;\ \sqrt{5+x} = v \ \left(0<u,v<\sqrt{10}\right)(*)$

Ta có hpt : $\begin{cases} u^2+v^2=10 \\ -\dfrac{4}{u} - \dfrac{4}{v} + 2(u+v) = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 10+2uv \\ (u+v)\left(1-\dfrac{2}{uv}\right) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Lại đặt $\dfrac{2}{uv} = t \Leftrightarrow uv = \dfrac{2}{t}\left(t > \dfrac{1}{5}\right)$

Ta được hpt : $\begin{cases}(u+v)^2=10+\dfrac{4}{t}\\(u+v)^2=\dfrac{16}{9(1-t)^2}\\uv=\dfrac{2}{t}\end{cases}$. Suy ra t phải thoả mãn:

$$10+\frac{4}{t}=\frac{16}{9(1-t)^2}\Leftrightarrow 8t=45t(1-t)^2+18(1-t)^2$$

$$\Leftrightarrow 45t^3-72t^2+t+18=0\Leftrightarrow(3t-2)(15t^2-14t-9)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow uv=3\\t=\dfrac{7+2\sqrt{46}}{15}\Rightarrow uv=\dfrac{30}{7+2\sqrt{46}}=a\end{array}\right.$$

Vậy u,v là nghiệm của một trong hai hệ sau:

$$(I)\begin{cases}(u+v)^2=10+2uv=16\\(u-v)^2=10-2uv=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=4\\u-v=\pm2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u_1=3,v_1=1\\u_2=1,v_2=3\end{array}\right.$$

$$(II)\begin{cases}(u+v)^2=10+2a\\(u-v)^2=10-2a\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u_3=\dfrac{\sqrt{10+2a}+\sqrt{10-2a}}{2}\\v_3=\dfrac{\sqrt{10+2a}-\sqrt{10-2a}}{2}\end{cases}\\\begin{cases}u_4=\dfrac{\sqrt{10+2a}-\sqrt{10-2a}}{2}\\v_4=\dfrac{\sqrt{10+2a}+\sqrt{10-2a}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Các nghiệm này đều thoả mãn điều kiện (*). Vậy pt đã cho có 4 nghiệm $x_k=5-u_k^2, k=1,2,3,4$.

Chọn C

Câu 18. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{x-m-3}+\sqrt[3]{x-3m-1}=\sqrt[3]{2x-4m-4}$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-14;22]$. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Tác giả : Ngô Lê Tạo,,Tên FB: Ngô Lê Tạo

Chọn B

Đặt $a=\sqrt[3]{x-m-3}$, $b=\sqrt[3]{x-3m-1}$ phương trình trở thành

$$a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3}\Leftrightarrow (a+b)^3=a^3+b^3\Leftrightarrow ab(a+b)=0.$$

Suy ra

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-m-3=0\\x-3m-1=0\\x-m-3=-x+3m+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+3=\alpha\\x=3m+1=\beta\\x=2m+2=\gamma\end{array}\right.$$

Ta có

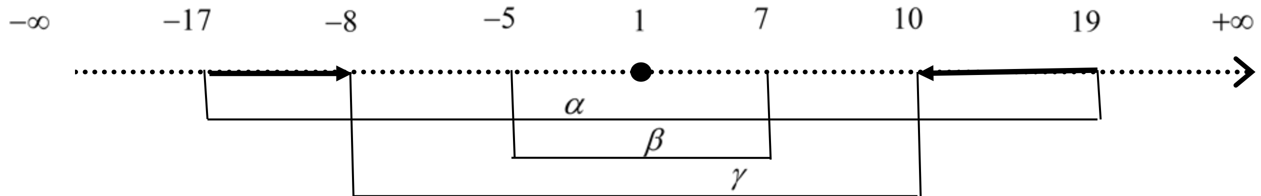
$$\alpha=\beta\Leftrightarrow m=1$$

$$\alpha=\gamma\Leftrightarrow m=1$$

$$-14\le\alpha\le 22\Leftrightarrow -17\le m\le 19$$

$$-14\le\beta\le 22\Leftrightarrow -5\le m\le 7$$

$$-14\le\gamma\le 22\Leftrightarrow -8\le m\le 10$$



Phương trình có đúng một nghiệm thuộc $[-14;22]$ khi và chỉ khi $m\in[-17;-8)\cup\{1\}\cup(10;19]$(Khi $m=1$ thì 3 nghiệm trùng nhau). Như vậy tập hợp S có 19 phần tử.

Email: huyenthuylthb@gmail.com

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A.100. **B.** 101. **C.** 102. **D.**103.

Lời giải

Tác giả : Phạm Thị Thanh Thủy,Tên FB:Phạm Thủy

Chọn D

Đk $x\ge -1$

Đặt $t=\sqrt{x+1}$, $t\ge 0$. Phương trình trở thành: $2t=t^2-1+m\Leftrightarrow m=-t^2+2t+1$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1,\ t\ge 0$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	2	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m \le 2$.

Số giá trị nguyên của m trong $[-100;100]$ là 103 giá trị.

Câu 20. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên lớn hơn – 2019 của tham số *m* để phương trình sau có nghiệm dương $\dfrac{(x^3+7x+m)^3}{1000} = 3x - m$.

A. 2019 **B.** 1000 **C.** 2018 **D.** 2021

Tác giả: Lương Tuấn Đức

Tên facebook: Giang Sơn. **Email: gacma1431988@gmail.com**

Chọn D

***Lời giải*.**

Phương trình đã cho tương đương $x^3+7x+m = 10\sqrt[3]{3x-m} \Leftrightarrow x^3+10x = 3x-m+10\sqrt[3]{3x-m}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x-m} = y \Rightarrow x^3+10x = y^3+10y \Leftrightarrow (x-y)(x^2-xy+y^2+10)=0$.

- $x^2-xy+y^2+10=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=-10 \Rightarrow VN$.

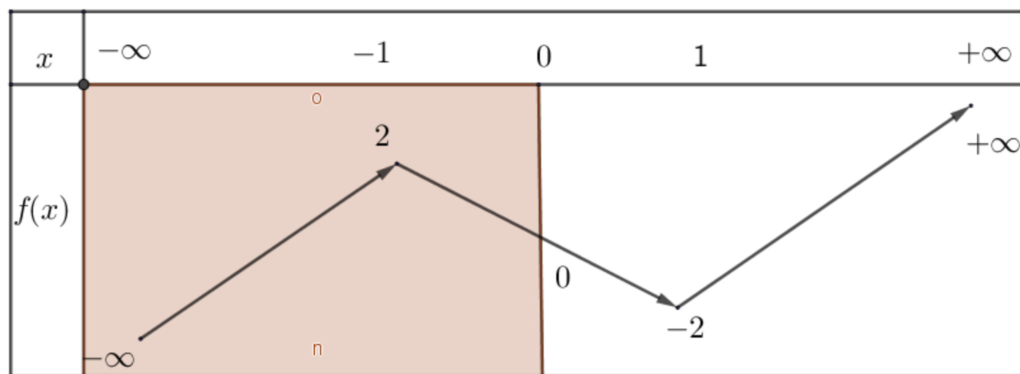
- $x=y \Rightarrow x=\sqrt[3]{3x-m} \Leftrightarrow x^3=3x-m \Leftrightarrow x^3-3x+2=2-m$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=2-m \Rightarrow 2-m \ge 0 \Rightarrow m \le 2$.

Kết hợp $m > -2019 \Rightarrow -2019 < m \le 2$ suy ra có 2021 giá trị nguyên *m*.

Ngoài ra, đối với phương trình $x^3-3x=-m$ chúng ta có thể sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số như sau

Đạo hàm $f'(t)=3t^2-3=0 \Leftrightarrow t=-1; t=1$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-m \geq -2 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Ngoài ra có thể sử dụng bất đẳng thức AM – GM như sau

$$3x - m + 2 = x^3 + 2 = x^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3} = 3x \Rightarrow m \leq 2.$$

Email: dangai.kstn.bkhn@gmail.com

Câu 21. Cho phương trình $x^2 + 2x(m - 1 - \sqrt{x+m}) + 8 = 2m\sqrt{x+m} - 2m^2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; -2]$ để phương trình đã cho có nghiệm thực ?

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Đăng Ái,Tên FB: Nguyễn Đăng Ái

Chọn A

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -m$

Đặt $t = \sqrt{x+m} \to x = t^2 - m$. Phương trình trở thành:

$$(t^2 - m)^2 + 2(t^2 - m)(m - 1 - t) + 8 = 2mt - 2m^2 \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 8 = -m^2 - 2m$$

$$\Leftrightarrow 2(t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 8) = 2(-m^2 - 2m) \Leftrightarrow (t^4 - 4t^3 + 4t^2) + (t^4 - 8t^2 + 16) = 2(-m^2 - 2m)$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 2t)^2 + (t^2 - 4)^2 = 2(-m^2 - 2m) \qquad (*)$$

Để pt (*) có nghiệm thì ít nhất: $2(-m^2 - 2m) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0 \to$ chỉ có $m = -2$ nguyên thỏa mãn.

Khi đó , phương trình (*) trở thành:

$$(t^2 - 2t)^2 + (t^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t = 0 \\ t^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \sqrt{x+m} = \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 6$$

Vậy ta **chọn đáp án A.**

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên m < 10 để PT: $\sqrt{2x^2-2(m+4)x+5m+10}+3-x=0$ có nghiệm.

A. 6 . **B.** 7 . **C.** 10 . **D.** 8 .

Lời giải

Tác giả :Trần Văn Hiếu,Tên FB: Hieu Tran

Chọn B

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2(m+4)x+5m+10}=x-3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ 2x^2-2(m+4)x+5m+10=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 & (1) \\ x^2-2(m+1)x+5m+1=0 & (2) \end{cases}$$

YCBT trở thành: Tìm m để hệ (1) (2) có nghiệm.

Trước hết ta tìm điều kiện để hệ (1) (2) vô nghiệm trong 2 trường hợp sau:

+TH 1: Hoặc là (2) vô nghiệm, tức là: $\Delta'=m^2-3m<0 \Leftrightarrow 0<m<3$ (3)

+TH 2: Hoặc là (2) có nghiệm $x_1\le x_2<3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ f(3)>0 \\ \dfrac{S}{2}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m\ge 0 \\ 4-m>0 \\ m+1<3 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 0 (4)$$

Kết hợp (3) và (4) suy ra $m<3$ là điều kiện để hệ (1) (2) vô nghiệm,

Vậy $m\ge 3$ là điều kiện để hệ (1) (2) có nghiệm.

Email: ngochuongdoan.6@gmail.com

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}+2m\sqrt{(x-1)(2-x)}-2\sqrt[4]{(x-1)(2-x)}=m^3$ có nghiệm duy nhất?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Tác giả : Đoàn Thị Hường,Tên FB: Đoàn Thị Hường

Lời giải.

Chọn B

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}+2m\sqrt{(x-1)(2-x)}-2\sqrt[4]{(x-1)(2-x)}=m^3 \qquad (1)$$

Điều kiện cần: Ta có $2-x=(3-x)-1; x-1=2-(3-x)$ nên nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $3-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Do đó để (1) có nghiệm duy nhất thì $3-x_0=x_0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{3}{2}$

Với $x_0=\dfrac{3}{2}$ thay vào (1) ta có $2\sqrt{\dfrac{1}{2}}+m-2\sqrt[4]{\dfrac{1}{2^2}}=m^3 \Leftrightarrow m=m^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \\ m=1 \end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

+) Với m = 0 có (1) trở thành

$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt[4]{(x-1)(2-x)}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{2-x}-\sqrt[4]{x-1}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{2-x}=\sqrt[4]{x-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Vậy m = 0 thỏa mãn bài toán.

+) Với m = 1 có (1) trở thành $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x-1)(2-x)}-2\sqrt[4]{(x-1)(2-x)}=1$

Dễ thấy phương trình này có ít nhất hai nghiệm x = 1; x = 2.

Vậy m = 1 không thỏa mãn bài toán.

+) Với m = - 1 có (1) trở thành

$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{(x-1)(2-x)}-2\sqrt[4]{(x-1)(2-x)}=-1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x}-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(\sqrt[4]{2-x}-\sqrt[4]{x-1}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x}=\sqrt{x-1} \\ \sqrt[4]{2-x}=\sqrt[4]{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Vậy m = -1 thỏa mãn bài toán.

Kết luận: Có hai giá trị m thỏa mãn bài toán.

Hoàng Trọng Anh

Email: ***DAnhDuoC@gmAil.Com***

Câu 24. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình:

$4^x+2=m.2^x.\sin(\pi x)\,(*)$ có nghiệm duy nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S\subset[1;2]$. **B.** $S\subset\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$. **C.** $S\subset[2;3]$. **D.** $S\subset[3;4]$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Danh Được,Tên FB: Danh Được Vũ

Chọn C

<u>Điều kiện Cần:</u>

Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình $(*)$

Khi đó $1-x_0$ cũng là một nghiệm của phương trình $(*)$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất thì $x_0=1-x_0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$

Thay vào $(*)$ ta được $m=2\sqrt{2}$

<u>Điều kiện đủ:</u>

Thay $m=2\sqrt{2}$ vào phương trình $(*)$ ta được:

$4^x+2=2\sqrt{2}.2^x.\sin(\pi x) \Leftrightarrow 2^x+\frac{2}{2^x}=2\sqrt{2}.\sin \pi x \,(**)$

Ta có: $VP(**)\le 2\sqrt{2}$, dấu bằng khi $\sin \pi x=1$

$VT(**)\ge 2\sqrt{2^x.\frac{2}{2^x}}=2\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $2^x=\frac{2}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2=2 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Do đó $(**)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$

Vậy $m=2\sqrt{2}$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.

PT - Tham số - Đặt ẩn phụ – Phạm Đức Phương - Email: ducphuong2004@gmail.com

Câu 25. Cho phương trình: $x+(x^2+m+2)\sqrt{x^2+m}=x^2+m+(x+2)\sqrt{x}$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. Tập hợp S có bao nhiêu số nguyên ?

A.0. **<u>B</u>.** 1. **C.**2. **D.**3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: (Khối 10)

Đặt $a=\sqrt{x^2+m}$, $b=\sqrt{x}$ $(a,b\ge 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$a^3-a^2+2a=b^3-b^2+2b \Leftrightarrow (a-b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-b^2)+2(a-b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-ab+b^2-a-b+2)=0\ (1)$.

Xét: $a^2-ab+b^2-a-b+2=\frac{1}{2}\left[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2+2\right]>0$

$(*)\Leftrightarrow a-b=0\Rightarrow x^2-x+m=0\ (2)$. Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt không âm.

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-4m>0\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<\frac{1}{4}$. Kết luận: S có 1 số nguyên.

Cách 2: (Khối 12)

Phương trình đã cho tương đương: $(x^2+m)\sqrt{x^2+m}-(x^2+m)+2\sqrt{x^2+m}=x\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}\ (1)$.

Đặt $f(t)=t^3-t^2+2t$, $f'(t)=3t^2-2t+2>0, \forall t\in R$. $f(t)$ đồng biến trên R.

(1) trở thành $f\left(\sqrt{x^2+m}\right)=f\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+m}=\sqrt{x}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x+m=0\ (*)\\ x\ge 0\end{cases}$

(*) có hai nghiệm phân biệt không âm khi và chỉ khi $0\le m<\frac{1}{4}$.

Email: truongthanhha9083@gmail.com

Câu 26. Cho phương trình $\sqrt{m+3\sqrt{m+3(\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x})}}=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

A. 10 **B.** 11

C. 9 **D.** 12

Họ tên: Nguyễn Bá Trường,Tên FB: thanhphobuon

Lời giải

Chọn A

Đặt $a=\sqrt{m+3(\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x})}; b=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}, (a\ge 0, b\ge 0)$.Điều kiện: $0\le x\le 5$.

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{m+3a}=b\\ \sqrt{m+3b}=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+3a=b^2\\ m+3b=a^2\end{cases}$

$\Rightarrow 3(a-b)=b^2-a^2\Leftrightarrow (a-b)(a+b+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a+b+3=0\ (L)\end{array}\right.$

Với $a=b\Rightarrow\sqrt{m+3b}=b\Leftrightarrow m=b^2-3b=f(b)\,(*)$

- $b=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}\Rightarrow b^2=x+10+2\sqrt{3x(10-2x)}\ge 10\Rightarrow b\ge\sqrt{10}\ (1)$

- $b=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}\Rightarrow b^2=\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2(5-x)}\right)^2\le(3+2)(x+5-x)=25\Rightarrow b\le 5\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $b\in\left[\sqrt{10};5\right]$

Xét hàm số $f(b)=b^2-3b$ trên đoạn $\left[\sqrt{10};5\right]$ ta có

$\underset{\left[\sqrt{10};5\right]}{\text{Min}}f(b)=f(\sqrt{10})=10-3\sqrt{10}, \underset{\left[\sqrt{10};5\right]}{\text{Max}}f(b)=f(5)=10$

Phương trình (*) có nghiệm khi $\underset{\left[\sqrt{10};5\right]}{\text{Min}}f(b)\le m\le\underset{\left[\sqrt{10};5\right]}{\text{Max}}f(b)\Rightarrow 10-3\sqrt{10}\le m\le 10$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên

có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Email: DongtoAn.nq2012@gmAil.Com

Face: Lê Anh Đông

Sưu tầm và chế lại.

Câu 27. Tìm những giá trị nguyên m thuộc $[-2019;2019]$ để phương trình

$$\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+m\sqrt{x+2\sqrt{x-9}-8}=x+\frac{3m+1}{2}$$

có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho $x_1<10<x_2$.

A. 2009. **B.** 2006. **C.** 2007. **D.**2008.

Giải:

PT $\Leftrightarrow\sqrt{x-9}+3+m\left(\sqrt{x-9}+1\right)=x+\dfrac{3m+1}{2}$ đặt $t=\sqrt{x-9}, t\ge 0$

PT trở thành : $\mathbf{t+3+m(t+1)=t^2+9+\frac{3m+1}{2} \Leftrightarrow 2t^2-2(m+1)t+m+13=0}$ (1)

Vì $\mathbf{t=\sqrt{x-9} \Leftrightarrow t^2=x-9 \Leftrightarrow t^2+9=x}$

Suy ra $\mathbf{x_1=t_1^2+9; x_2=t_2^2+9}$

PT ban đầu có nghiệm $\mathbf{x_1<10<x_2 \Leftrightarrow t_1^2+9<10<t_2^2+9 \Leftrightarrow t_1^2<1<t_2^2}$

Vì $\mathbf{t\ge 0}$, Nên ta có $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\mathbf{0\le t_1<1<t_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ (t_1-1)(t_2-1)<0 \\ t_1+t_2>0 \\ t_1.t_2\ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2-2(m+13)>0 \\ \frac{m+13}{2}-m-1+1<0 \\ m+1>0 \\ \frac{m+13}{2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-25>0 \\ 13-m<0 \\ m>-1 \\ m\ge -13 \end{cases} \Leftrightarrow m>13.$$

Vậy khi $\mathbf{m>13}$ thì phương trình có nghiệm thỏa mãn.

Đáp án: **2006 B**

Câu 28. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{4x+m-1}=x-1$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Tác giả : Lê Thị Thu Hằng,Tên FB: Lê Hằng

Chọn B

$\sqrt{4x+m-1}=x-1$ (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 4x+m-1=x^2-2x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-6x+2=m \quad (2) \end{cases}$

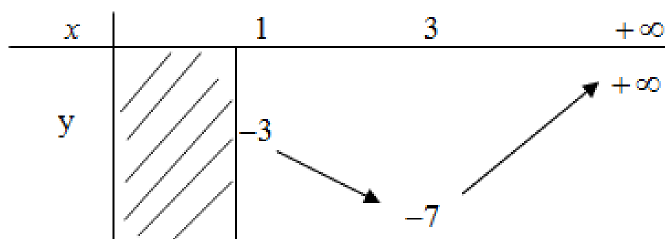
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \ge 1$

Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đường thẳng $y=m$

và parabol (P): $y = x^2 - 6x + 2$

Bảng biến thiên:



Vậy $-7 < m \le -3$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6;-5;-4;-3\}$.

Câu 29. *Biết rằng tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình* $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ *có nghiệm là* $S = [a;b]$ *. Tính* $a+b$ *?*

A. $a+b = \frac{31}{4}$ B. $a+b = \frac{49}{4}$ C. $a+b = 10$ D. $a+b = \frac{5}{2}$

Lời giải

Tác giả : Trần Quốc Đại,Tên FB: www.facebook.com/tqd1671987

Chọn A

Điều kiện: $0 \le x \le 9$

PT (1) $\Leftrightarrow x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m$

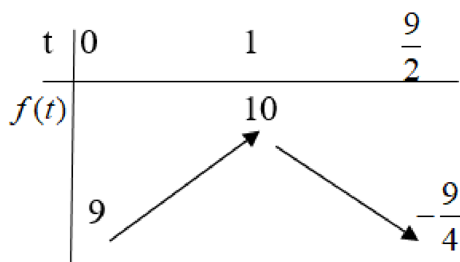
$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{-x^2 + 9x} = -x^2 + 9x + m$ *(2)*

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 9x}$ *do* $0 \le x \le 9$ *suy ra* $0 \le t \le \frac{9}{2}$

Phương trình (2) trở thành $9 + 2t = t^2 + m \Leftrightarrow -t^2 + 2t + 9 = m$ (3)

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9$, $0 \le t \le \frac{9}{2}$

Bảng biến thiên :



Phương trình (1) có nghiệm $x\in[0;9]\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $t\in\left[0;\frac{9}{2}\right]$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{4}\le m\le 10$ suy ra $S=\left[-\frac{9}{4};10\right]\Rightarrow a+b=\frac{31}{4}$

Tác giả : Phùng Hằng,Tên FB: Phùng Hằng

Email: phunghang10ph5s@gmail.com

Câu 30. Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2}=m$ có nghiệm khi $m\in[a;b]$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T=(a+2)\sqrt{2}+b$ là:

A. $T=3\sqrt{2}+2$. **B.** $T=6$. **C.** $T=8$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}=t$ (1) $\Rightarrow t^2=\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)^2$

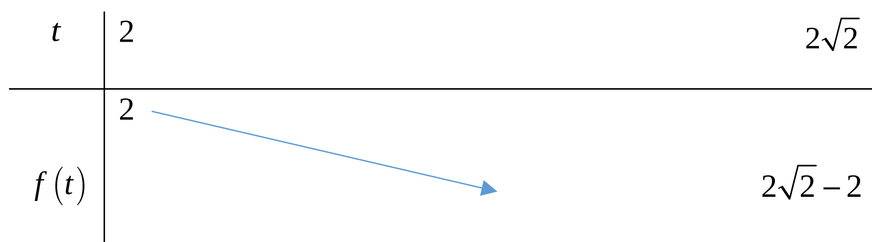
Ta có: $\begin{cases}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)^2=2-x+2\sqrt{4-x^2}+2+x=4+2\sqrt{4-x^2}\ge 4\\ \left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(2-x+2+x\right)=8\end{cases}$

$\Rightarrow 4\le t^2\le 8\Rightarrow 2\le t\le 2\sqrt{2}$ **(do** $t\ge 0$**). Vậy,** $t\in\left[2;\ 2\sqrt{2}\right]$**. Từ (1)** $\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=\frac{t^2-4}{2}$

Phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2}=m$ trở thành: $t-\frac{t^2-4}{2}=m\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2+t+2=m$ (*)

Xét hàm số $y=f(t)=-\frac{1}{2}t^2+t+2,\ t\in\left[2;\ 2\sqrt{2}\right]$, đồ thị hàm số có đỉnh $I\left(1;\frac{5}{2}\right)$

Bảng biến thiên:



Để phương trình (*) có nghiệm thì $m \in \left[2\sqrt{2}-2;2\right] \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2}-2 \\ b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow T = (a+2)\sqrt{2}+b = (2\sqrt{2}-2+2).\sqrt{2}+2 = 6$.

<u>Cách 2</u>:

Xét hàm số $y = \sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2}$ trên $\left[-2;2\right]$, ta có:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}-x = 0,\ (x \ne \pm 2) \Leftrightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{2+x} = x \ \ (1)$$

Nếu $x<0$ **thì** $\sqrt{2-x} > \sqrt{2+x} \Rightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{2+x} > 0 \Rightarrow (1)$ **vô nghiệm.**

Nếu $x>0$ **thì** $\sqrt{2-x} < \sqrt{2+x} \Rightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{2+x} < 0 \Rightarrow (1)$ **vô nghiệm.**

Thay $x=0$ **vào (1), ta thấy** $x=0$ **là nghiệm và đồng thời là nghiệm duy nhất của (1)**

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		2
$f'(x)$	‖	-	0	+	‖
$f(x)$	2 ↘		$2\sqrt{2}-2$		↗ 2

Để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2} = m$ **có nghiệm thì** $m \in \left[2\sqrt{2}-2;2\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2}-2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow T = (a+2)\sqrt{2}+b = (2\sqrt{2}-2+2).\sqrt{2}+2 = 6.$$

Câu 31. Tập tất cả giá trị của m để phương trình $x^2 - mx = 1 - m - |x-1|$ có nghiệm duy nhất là đoạn $\left[a;b\right]$. Tính a^2+b^2.

A. $P=1$. **B.** $P=4$. **C.** $P=5$. **<u>D</u>.** $P=10$.

Lời giải

Tác giả: Trần Quốc Thép,Tên FB: Thép Trần Quốc

Chọn D

Phương trình đã cho tương đương với $(x-1)(x+1) - m(x-1) + |x-1| = 0 (1)$

TH1. $x \geq 1, (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1-m+1=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m-2<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 3$

TH2. $x<1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x=m$

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 1$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chi khi TH1 có nghiệm duy nhất, TH2 vô nghiệm hay $1 \leq m \leq 3$.

VDC PT-HPT CHỨA CĂN

VẤN ĐỀ 4-2. PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ

Email: Dongpt@C3phuCtho.eDu.vn

Câu 1. Tổng các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x^2-2x-6\sqrt{x^2-2x+5}-m=0$ có nghiệm thực bằng

A. -105 . **B.** -110 . **C.** -115 . **D.** -120 .

Lời giải

Tác giả : Hoàng Tiến Đông ***Tên FB:*** Hoàng Tiến Đông

Điều kiện: $x^2-2x+5\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2+4\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $x^2-2x-6\sqrt{x^2-2x+5}-m=0\ (*)$.

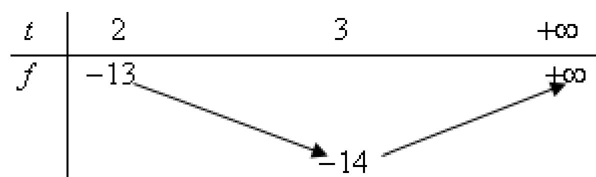
Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4}\Rightarrow t\ge 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$t^2-6t-m-5=0\Leftrightarrow t^2-6t-5=m$.

Xét hàm số: $f=t^2-6t-5, t\in[2;+\infty)$.

Bảng biến thiên:



Phương trình $(*)$ có nghiệm $m\ge -14$.

Theo đề m là số nguyên âm nên có 14 giá trị m. Suy ra tổng các giá trị của m là -105

Email: Nguyenmy181@gmail.com.

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left[m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-16\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{x-1}}\right]=1$ có hai nghiệm thực phân biệt. Biết rằng $S=(a;b)$ tính $b-a$

A. 30 **B.** 40 **C.** 49 **D.** 50

.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Trà My,Tên FB: Nguyễn My

Chọn C

Đkxđ: $x>1$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left[m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}-16\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}}\right]=1 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}-16\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow m+\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}-16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}=1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow m+\frac{x-(x-1)}{\sqrt{x(x-1)}}-16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}=1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

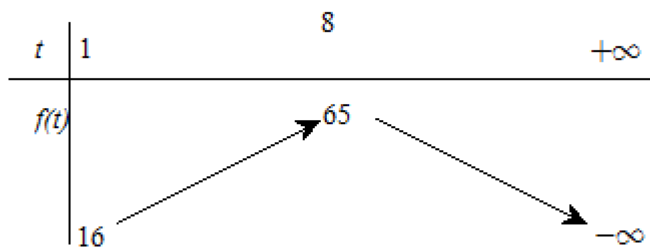
$$\Leftrightarrow m+\sqrt{\frac{x}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}=1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow m=-\sqrt{\frac{x}{x-1}}+16\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}+1$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x-1}}\Rightarrow t>1$

Phương trình đã cho trở thành $m-16t=1-t^2\Leftrightarrow -t^2+16t+1=m$ (2)

Với một giá trị của $t>1$ cho ta một giá trị của $x>1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t>1$



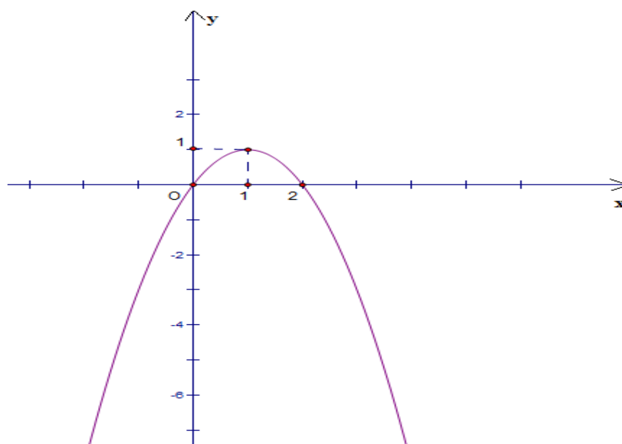
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m\in(16;65)$.

BÀI HOÀN CHỈNH ĐÃ ĐƯỢC SỬA SAU KHI CÁC THẦY CÔ PHẢN BIỆN XONG

Email: hoanggiahung.bdh@gmail.com

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình sau có 8 nghiệm phân biệt: $\sqrt{m+4\sqrt{m+16|f(x)|}}-4|f(x)|=0$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.



Lời giải

Tác giả : Hoàng Gia Hứng,Tên FB: Hoàng Gia Hứng

Chọn A

Đặt $t=\left|f\left(x\right)\right|,t\ge 0$

Dựa vào đồ thị ta thấy, với $0<t<1$ cho ta 4 giá trị của x.

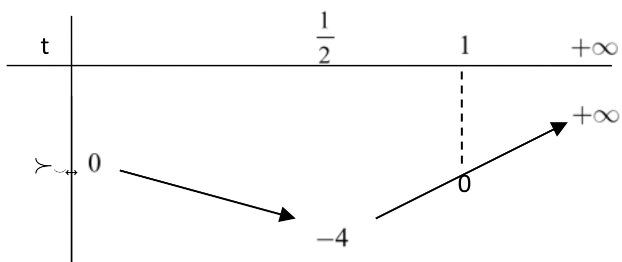
Phương trình trở thành: $\sqrt{m+4\sqrt{m+16t}}=4t\Leftrightarrow m+4\sqrt{m+16t}=16t^2$

Đặt $u=\sqrt{m+16t},u\ge 0$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} m+4u=16t^2\left(1\right) \\ m+16t=u^2\left(2\right) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(u-4t\right)\left(4+u+4t\right)=0\Leftrightarrow u=4t$ $\left(\text{do } 4+u+4t>0\right)$. Khi đó:

$4t=\sqrt{m+16t}\Leftrightarrow 16t^2-16t=m\left(*\right)\left(t\ge 0\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=16t^2-16t$ trên $\left[0;+\infty\right)$



Để phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm $t_1;t_2$ thỏa mãn: $0<t_1<t_2<1\Leftrightarrow -4<m<0$. Do m là số nguyên nên $m\in\left\{-3;-2;-1\right\}$. **Chọn A**

Email: phamcongdung2010@gmail.com

Câu 4. Cho phương trình $x^3+4x^2+6x-(x+m+2)\sqrt{x+m}=m-4$ (1). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt ?

A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Tác giả : Phạm Công Dũng,Tên FB:Phạm Công Dũng

Chọn B

Lớp 10 .

Điều kiện $x\geq -m$.

Phương trình tương đương với $(x+1)^3+(x+1)^2+2(x+1)=\sqrt{(x+m)}^3+x+m+2\sqrt{x+m}$.

Điều kiện $\begin{cases} a=x+1 \\ b=\sqrt{x+m} \end{cases}$

Phương trình trở thành : $a^3+a^2+2a=b^3+b^2+2b \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+a+b+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a^2+ab+b^2+a+b+2=0\ (*) \end{array}\right.$$

Ta có (*) tương đương $a^2+a(b+1)+b^2+b+2=0,$ phương trình này vô nghiệm.

Vậy $a=b \Rightarrow x+1=\sqrt{x+m} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x+1=m\ (2). \end{cases}$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cần phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1;+\infty)$.

Xét hàm số $y=x^2+x+1$ trên $[-1;+\infty)$ ta có :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	1 ↘	$\frac{3}{4}$ ↗	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\frac{3}{4} < m \le 1$, do m là số nguyên nên $m = 1$.

Lớp 12

Phương trình tương đương với $(x+1)^3 + (x+1)^2 + 2(x+1) = \sqrt{(x+m)}^3 + x + m + 2\sqrt{x+m}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t$. Hàm số đồng biến.

Ta có $(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt{x+m}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{x+m} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 + x + 1 = m \ (2). \end{cases}$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cần phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1; +\infty)$.

Xét hàm số $y = x^2 + x + 1$ trên $[-1; +\infty)$ ta có :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\frac{3}{4} < m \le 1$, do m là số nguyên nên $m = 1$.

Email: nguyenspk54@gmail.com

Câu 5. Số giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{x}} + \sqrt{m-\sqrt{x}} = m$ có nghiệm là:

A. 1. **B.**2. **C.**3. **D.**4.

Lời giải

Tác giả : Lê Thị Nguyên,Tên FB: Nguyên Ngọc Lê

Chọn D

Từ phương trình suy ra $m \geq 0$.

TH1: $m=0$,pt trở thành $\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{-\sqrt{x}}=0$; pt có nghiệm duy nhất $x=0$.

TH2: m > 0.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ m+\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq m^2 \ (*) \\ m-\sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$

Trong điều kiện (*) bình phương hai vế phương trình ta được:

$$pt \Leftrightarrow 2m+2\sqrt{m^2-x}=m^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-x}=m^2-2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m \geq 0 \\ 4(m^2-x)=m^4-4m^3+4m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ x=\frac{1}{4}(-m^4+4m^3) \end{cases}$$

Phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ 0 \leq \frac{1}{4}(-m^4+4m^3) \leq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m^3(4-m) \geq 0 \\ m^2(m^2-4m+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$

Do m nguyên nên $m \in \{0;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Bài đã sửA.

Email: huunguyen1979@gmail.com

Câu 6. Cho phương trình $x^3+x^2-(m+1)x+8=(x-3)\sqrt{x^3+x^2-mx+6}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m và $m \leq 10$ thì phương trình có nghiệm. Tính tổng T các phần tử của S?

A. $T=52$. **B.** $T=10$. **C.** $T=19$. **D.** $T=9$.

Lời giải

Họ và tên : Đào Hữu Nguyên,Tên FB: Đào Hữu Nguyên

Chọn C

Điều kiện :

$pt \Leftrightarrow x^3+x^2-mx+6-(x-3)\sqrt{x^3+x^2-mx+6}-(x-2)=0$

Đặt $t=\sqrt{x^3+x^2-mx+6}, t\ge 0$

Ta có phương trình: $t^2-(x-3)t-(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=x-2 \end{array}\right.$

Vậy $t=x-2$ có $\sqrt{x^3+x^2-mx+6}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^3+2=(m-4)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2+ \end{cases}$ [redacted] $= m-4$

Lớp 10 : Với $x\ge 2$ ta có $x^2+\frac{2}{x}=\left(x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\right)-\frac{14}{x}\ge 3\sqrt[3]{x^2.\frac{8}{x}.\frac{8}{x}}-\frac{14}{2}=5$

Dấu bằng xảy ra khi $x=2$

Suy ra để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m-4\ge 5 \Leftrightarrow m\ge 9$

Do $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[9;10] \end{cases}$ nên $m\in\{9;10\}$. Vậy $T=19$

Lớp 12: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$, $x\in[2;+\infty)$

Email: trungthuong2009@gmail.com

Câu 7. Cho phương trình $(x^2-2x+m)^2-2x^2+3x-m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

A. 11. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 13.

Lời giải

Tác giả : Phạm Thành Trung,Tên FB: Phạm Thành Trung

Chọn B

Biến đổi phương trình về dạng: $(x^2-2x+m)^2-2(x^2-2x+m)+m=x$

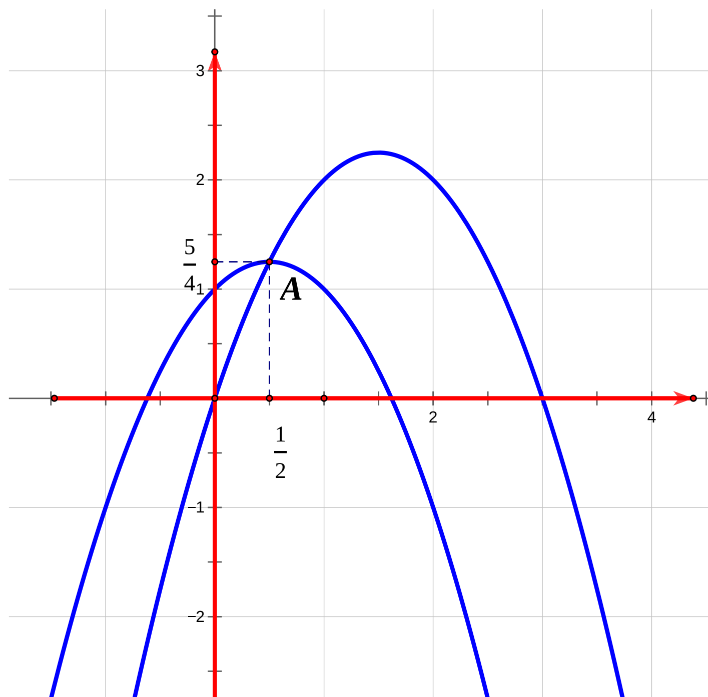
Đặt $a=x^2-2x+m$ ta có hệ: $\begin{cases} a=x^2-2x+m \\ x=a^2-2a+m \end{cases}$

Từ hệ phương trình có: $(x-a)(x+a-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x+a-1=0 \end{array}\right.$

Hay có: $\left[\begin{array}{l} x=x^2-2x+m \\ x+x^2-2x+m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-x^2+3x \\ m=-x^2+x+1 \end{array}\right.$

Vẽ trên cùng một đồ thị các Parabol: $(P_1): y=-x^2+3x; (P_2): y=-x^2+x+1$ ta có $m \le \frac{5}{4}$

Vậy có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu của bài toán



https://www.fACeBook.Com/groups/900248096852019/permAlink/907980292745466/?Comment_iD=907988409411321&notif_iD=1535383506789140&notif_t=group_Comment

Email: Lanntn.c3tk@nghean.edu.vn

Câu 8. Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên $m \in (-\infty; 30)$ để phương trình sau có nghiệm

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-m=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

A. 245. **B.** 224. **C.** -224. **D.** 210.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Thị Ngọc Lan,Tên FB:Ngoclan nguyen

Chọn A

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-m=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16 \quad (1)$

Điều kiện: $x \ge -1$

Với điều kiện trên pt (1) tương đương:

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-m=\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\right)^2-20 \Leftrightarrow -\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}+20=m$

Đặt t=$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}, t \ge 1$

Pt trở thành: $-t^2+t+20=m$

Xét hàm số : $f(t)=-t^2+t+20$ với $t\ge 1$

Ta có $f(t)=-t^2+t+20$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ nên : $f(t)\ge f(1)\Leftrightarrow f(t)\ge 20$

Vậy pt có nghiệm khi $m\ge 20$

Do $m\in(-\infty;30)$ nên $m\in\{20,21,22,23,24,25,26,27,28,29\}$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên $m\in(-\infty;30)$ để phương trình có nghiệm là 245

Tên: Nam PhươngFB: Nam Phuong

Email: nguyentrietphuong@gmail.com

Câu 9. Phương trình $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm khi giá trị của tham số m thuộc nửa khoảng $(a;b]$. Tính giá trị biểu thức $P=2a+b$.

A. $P=\frac{7}{3}$. **B.** $P=-\frac{5}{3}$. **C.** $P=-\frac{2}{3}$. **D.** $P=\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

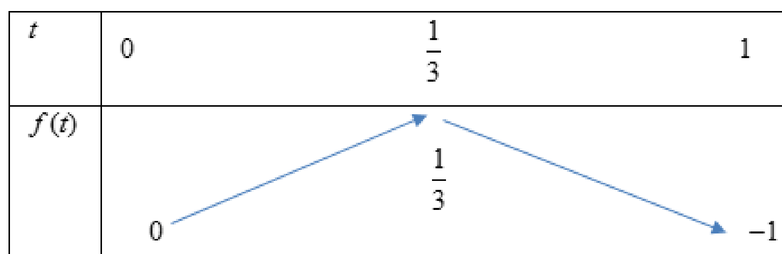
Điều kiện: $x\ge 1$

Ta có: $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$

Chia hai vế hương trình cho $\sqrt{x+1}$ ta được: $3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, $0\le t<1$. Ta có phương trình: $3t^2+m=2t\Leftrightarrow m=-3t^2+2t$

Xét hàm số $f(t)=-3t^2+2t,\ 0\le t<1$



Dựa vào bảng biến thiên ta được $m\in\left(-1;\frac{1}{3}\right]$.

Email: nnqman2305@gmail.com

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$ có đúng 2 nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Tác giả : Ngô Nguyễn Quốc Mẫn,Tên FB: Ngonguyen Quocman

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x-4}, t\geq 0$. Với mỗi nghiệm $t_0\geq 0$ cho ta đúng một nghiệm $x_0\geq 4$.

Phương trình trở thành: $m=|t-1|+|t-3|$. Ta có $f(t)=|t-1|+|t-3|=\begin{cases}4-2t, \text{ khi } 0\leq t\leq 1\\ 2, \quad \text{ khi } 1<t<3\\ 2t-4, \text{ khi } t\geq 3\end{cases}$

BBT:

t	0	1	3	$+\infty$
y	4 ↘	2 →	2 ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, **chọn C.**

Email: trungthuy2005@gmAil.Com

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình
$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=m^3$ (1) Có nghiệm duy nhất

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Tác giả : Nguyễn Đình Trưng,Tên FB: Nguyễn Đình T-Rưng

Đáp án

Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm của pt(1) thì $1-x_0$ cũng là nghiệm cuả pt(1).

Pt(1) có nghiệm duy nhất thì $x_0=1-x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}\Rightarrow m^3=m\Leftrightarrow m=0\vee m=\pm 1$

Đk: $0\leq x\leq 1$

+Với $m=0$ (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=0\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $m=0$ thỏa mãn

+Với $m=1$ (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=1-2\sqrt{x(1-x)}$

$$(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2=(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1-x}\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=0 \\ x=1\end{array}\right. \text{ Loại } m=1$$

+Với $m=-1$ (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}+1-2\sqrt{x(1-x)}=0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1-x}\\ \sqrt{x}=\sqrt{1-x}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ nên $m=-1$ thỏa mãn

Vậy $m=0 \vee m=-1$ có 2 giá trị của m. Chọn C

Email: lamdienan@gmail.com

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ có nghiệm thực?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Tác giả : Lâm Điền An,Tên FB: Lâm Điền An

Chọn A

Cách lớp 10	**Cách lớp 12**
Điều kiện $0 \le x \le 9$ Với điều kiện trên ta có: Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{9-x} \Rightarrow t^2=9+2\sqrt{x(9-x)} \ge 9 \Rightarrow t \ge 3$ $t=3 \Leftrightarrow x=0; x=9.$ Mặt khác: $t=\sqrt{x}+\sqrt{9-x} \overset{BCS}{\le} \sqrt{(1^2+1^2).(x+9-x)}=3\sqrt{2}$ $t=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}} \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$ (Hoặc: $t^2=9+2\sqrt{x(9-x)} \overset{Cauchy}{\le} 9+x+(9-x)=18$ $\Rightarrow t \le 3\sqrt{2}$	Điều kiện $0 \le x \le 9$ Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{9-x}$ Ta có: $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}$ $t'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$ $t(0)=3; t(9)=3; t(\dfrac{9}{2})=3\sqrt{2}$ Suy ra $3 \le t \le 3\sqrt{2}$ Ta có: $t=\sqrt{x}+\sqrt{9-x} \Rightarrow t^2=9+2\sqrt{x(9-x)}$ $\Rightarrow \sqrt{x(9-x)}=\dfrac{t^2-9}{2} \Rightarrow -x^2+9x=\left(\dfrac{t^2-9}{2}\right)^2$

$\Rightarrow t=3\sqrt{2}\Leftrightarrow x=9-x\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$)

Ta có:

$t=\sqrt{x}+\sqrt{9-x}\Rightarrow t^2=9+2\sqrt{x(9-x)}$

$\Rightarrow\sqrt{x(9-x)}=\frac{t^2-9}{2}\Rightarrow -x^2+9x=\left(\frac{t^2-9}{2}\right)^2$

$\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ trở thành:

$4m=-t^4+22t^2-81$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $4m=-t^4+22t^2-81$ có nghiệm thực thỏa $3\le t\le 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $4m=-u^2+22u-81=f(u)$ có nghiệm thực thỏa $9\le u\le 18$ (đặt $u=t^2$)

u	9	11	18
$f(u)$	36 ↗	40	↘ -9

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$-9\le 4m\le 40\Leftrightarrow\frac{-9}{4}\le m\le 10.$

$\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ trở thành:

$4m=-t^4+22t^2-81$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $4m=-t^4+22t^2-81=f(t)$ có nghiệm thực thỏa $3\le t\le 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\underset{[3;3\sqrt{2}]}{Min}f(t)\le 4m\le\underset{[3;3\sqrt{2}]}{Max}f(t)\Leftrightarrow\frac{-9}{4}\le m\le 10$

Email: thantaithanh@gmail.com

Câu 13. Biết rằng có đúng k giá trị của tham số m là $m_1,m_2,...,m_k$ $(k\in\mathbb{Z},1\le k\le 8)$ thì phương trình $2\sqrt{x^2+2\left(\sqrt{2}x+m^2\right)+3m+1}=2\left|x+\sqrt{2}\right|+3+m$ có nghiệm duy nhất. Khi đó $T=\left|m_1.m_2...m_k\right|$ bằng :

A. $\frac{13}{7}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13}{5}$. **D.** $\frac{13}{8}$.

Tác giả : Nguyễn Trung Thành,Tên FB: https://www.facebook.com/thantaithanh

Lời giải

Chọn A

$2\sqrt{x^2+2\left(\sqrt{2}x+m^2\right)+3m+1}=2\left|x+\sqrt{2}\right|+3+m \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2+2m^2+3m-1}=2\left|x+\sqrt{2}\right|+3+m$ (1)

Đặt $t=x+\sqrt{2}$, ta có phương trình $2\sqrt{t^2+2m^2+3m-1}=2|t|+3+m$ (2).

Nhận xét: (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (2) có nghiệm duy nhất.

Giả sử t_0 là một nghiệm của (2) thì $-t_0$ cũng là nghiệm của (2). Do đó để (2) có nghiệm duy nhất, điều kiện cần là $t_0=-t_0 \Leftrightarrow t_0=0$.

Với $t_0=0$ thay vào (2) ta được $2\sqrt{2m^2+3m-1}=3+m \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -3 \\ 7m^2+6m-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{13}{7} \end{array}\right.$.

Thử lại, với $m=1$: (2) trở thành : $2\sqrt{t^2+4}=2|t|+4 \Leftrightarrow t^2+4=t^2+4|t|+4 \Leftrightarrow t=0$ (thỏa mãn)

Với $m=-\dfrac{13}{7}$: (2) trở thành : $2\sqrt{t^2+\dfrac{16}{49}}=2|t|+\dfrac{8}{7} \Leftrightarrow t^2+\dfrac{16}{49}=t^2+\dfrac{8}{7}|t|+\dfrac{16}{49} \Leftrightarrow t=0$ (thỏa mãn)

Vậy $T=\dfrac{13}{7}$.

Họ tên: Nguyễn Thị Tuyếtface book: Nguyen Tuyet

Email: tuyetspt@gmail.com

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $m\le 2019$ để phương trình $x^2+2(3-m)x+1+4\sqrt{2x\left(x^2+1\right)}=0$ có nghiệm.

A. 2000. **B.** 2012. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

+ Phương trình tương đương với $2mx=x^2+6x+1+4\sqrt{2x\left(x^2+1\right)}$ $(*)$

+ Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

+ Nhận xét rằng, $x=0$ không phải nghiệm của phương trình $(*)$. Chia hai vế của phương trình $(*)$ cho x, $(x>0)$ ta được $2m=6+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

+ Đặt $t=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{x}\right)}$, khi đó áp dụng bất đẳng thức cô si, ta có $x+\frac{1}{x}\ge 2$ nên $t\ge 2$.

+ Ta có phương trình $2m=6+\frac{t^2}{2}+4t$ (1).

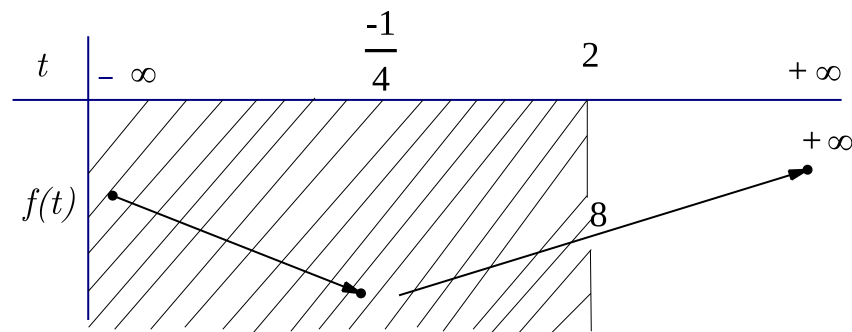
+ Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t\ge 2$.

Đến đây xử lý bài toán theo 2 cách

Cách 1:

$(1)\Leftrightarrow m=\frac{t^2}{4}+2t+3$, đặt $f(t)=\frac{t^2}{4}+2t+3$.

BBT của $f(t)$



Vậy để phương trình (1) có nghiệm $t\ge 2$ thì $m\ge 8$.

Khi đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $m\le 2019$ để phương trình có nghiệm là 2019-8+1=2012 giá trị.

Cách 2:

$(1)\Leftrightarrow t^2+8t+12-4m=0$ (2) có nghiệm $t\ge 2$.

Vì $S=-8<0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm $t\ge 2$.

Để có nghiệm $t\ge 2$ thì phương trình (2) có nghiệm $t_1\le 2\le t_2$

Điều kiện $af(2)\le 0\Leftrightarrow 32-4m\le 0\Leftrightarrow m\ge 8$

Khi đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $m\le 2019$ để phương trình có nghiệm là 2019-8+1=2012 giá trị.

Email: **nguyentinh050690@gmail.com**

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=m$ có hai nghiệm âm phân biệt?

A. 3. **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Họ tên: Nguyễn Tình **Têm FB: Gia Sư Toàn Tâm**

Lời giải

ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l} x>3 \\ x\le -1 \end{array}\right.$

Đặt $t=(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}\Rightarrow t^2=(x-3)(x+1)$

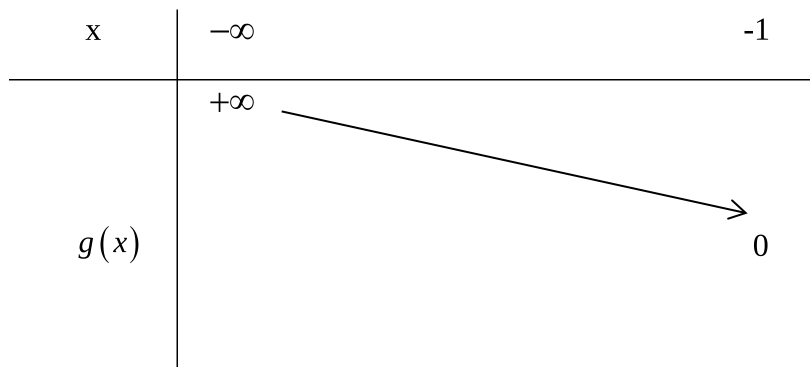
Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2+4t-m=0$ (1)

Ta có:

$\left\{\begin{array}{l} x<0\,(gt) \\ x\le -1\text{(dkxd)} \end{array}\right.\Rightarrow x\le -1\Rightarrow x-3<0$

$\Rightarrow t=(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-\sqrt{(x+1)(x-3)}=-\sqrt{g(x)}\;;g(x)=x^2-2x-3$

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-3$ trên $(-\infty;-1]$



$\Rightarrow g(x)\in[0;+\infty)\Rightarrow t\in(-\infty;0]$

Ta thấy với mỗi giá trị $t\le 0$ sẽ cho 1 giá trị $x\le -1$ tương ứng. Do đó, để phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm t_1,t_2 thõa mãn $t_1<t_2\le 0$.

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 + m > 0 \\ t_1 t_2 = -m \geq 0 \\ t_1 + t_2 = -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$ **Chọn D**

Email: Trangvuthu.84@gmail.com

Câu 16. Cho phương trình $2x - 7 + (1+x)\sqrt{8-x} - (8-x)\sqrt{1+x} = m\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{8-x}\right)$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình có nhiều hơn một nghiệm là $[a;b)$. Tính $A = b - \sqrt{2}a$ ta thu được kết quả bằng:

A. $7\sqrt{2} - 12$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 9. **D.** $\frac{-7\sqrt{2} - 12}{2}$.

Lời giải

Tác giả : Vũ Thị Thu Trang,Tên FB: TrangVu

Chọn B

Xét phương trình: $2x - 7 + (1+x)\sqrt{8-x} - (8-x)\sqrt{1+x} = m\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{8-x}\right)$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 8$.

Ta có: $x = \frac{7}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Với $x \in [-1;8] \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$. Ta có phương trình tương đương với:

$2x - 7 + \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{8-x}\right)\sqrt{(1+x)(8-x)} = m\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{8-x}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{\sqrt{x+1} - \sqrt{8-x}} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m$.

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}$.

Ta có: $t^2 = 9 + 2\sqrt{1+x}.\sqrt{8-x} \geq 9 \Rightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = \frac{t^2 - 9}{2}$ và $t \geq 3$.

Mặt khác $\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}\right)^2 \leq (1+1)(1+x+8-x) = 2.9 \Rightarrow t \leq 3\sqrt{2}$. Mà $x \neq \frac{7}{2}$ nên $t < 3\sqrt{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $t + \frac{t^2 - 9}{2} = m$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{t^2 - 9}{2}; t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right)$, có bảng biến như sau:

t	3	$3\sqrt{2}$
$f(t)$	3 ↗	$\frac{9+6\sqrt{2}}{2}$

Phương trình đã cho có nhiều hơn một nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm $x \neq \frac{7}{2}$ $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $t \in \left[3;3\sqrt{2}\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $3 \le m < \frac{9+6\sqrt{2}}{2}$. Do đó: $a=3; b=\frac{9+6\sqrt{2}}{2}$. Vậy

$A = b - \sqrt{2}a = \frac{9+6\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \frac{9}{2}$.

Email: phuongthu081980@gmAil.Com

Câu 17. Cho phương trình: $x^3 + \left(3-a^2\right)a = 3\sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a}$ $(*)$. Số các giá trị nguyên của a để phương trình (*) 3 nghiệm phân biệt là :

A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t = \sqrt[3]{3x+\left(a^2-3\right)a} \Rightarrow t^3 = 3x + \left(a^2-3\right)a$

Khi đó ta có hpt:

$$\begin{cases} x^3 = 3t + \left(a^2-3\right)a \\ t^3 = 3x + \left(a^2-3\right)a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ x^2 + xt + t^2 + 3 = 0 \left(VN\right) \end{array}\right.$$

$$x = t \Rightarrow x^3 = 3x + \left(a^2-3\right)a \Leftrightarrow \left(x^3 - a^3\right) - 3\left(x-a\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = a \\ x^2 + ax + a^2 - 3 = 0 \left(1\right) \end{array}\right.$$

pt $\left(1\right)$ có: $\Delta = 12 - 3a^2$

Pt (*) có 3 phân biệt $\Leftrightarrow$ $pt\left(1\right)$ có 2nghiệm phân biệt $\neq a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \left(do \text{ gt} : a \in Z\right)$$

chọn A

Tác giả: Nguyễn Thị Phương Thu FB: Nguyễn Phương Thu

Câu 18. Biết rằng phương trình $2x+\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}=m+x^3$ (m là tham số) có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left[a;\sqrt{\frac{b}{c}}\right]$.

Biết $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản, giá trị của $a+b-c$ bằng

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải (CáCh giải Cho HS lớp 10)

Chọn C

- Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}$ (1), phương trình đã cho trở thành $t^3+t=2m \quad (*)$

- Tìm điều kiện cho t: Coi (1) là phương trình ẩn x tham số t

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge x\\ 2x^2-2tx+t^2-1=0\ (2)\end{cases}.$$

Xét (2), ta có $\Delta=2-t^2$.

(2) có nghiệm khi và chỉ khi $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Với $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, (2) có hai nghiệm $x_1=\dfrac{t-\sqrt{2-t^2}}{2}$, $x_2=\dfrac{t+\sqrt{2-t^2}}{2}$.

(1)Có nghiệm khi và chỉ khi $t\ge x_1\Leftrightarrow t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

- Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$

- Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên R suy ra: $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi

$$f(-1)\le 2m\le f\left(\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow -1\le m\le\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Nhận xét

Có thể đặt điều kiện cho t như sau:

Điều kiện cho $t=x+\sqrt{1-x^2}$

- $x\in[-1;1]\Rightarrow t\ge -1\,(i)$.

- Lại có $t^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\le 2\,(ii)$

- Từ (i) và (ii) suy ra $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$

Email: ChuquoChung2000@gmAil.Com

Phần: Phương trình

Câu 19. Cho phương trình: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=m$ (1)

Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt?

Lời giải

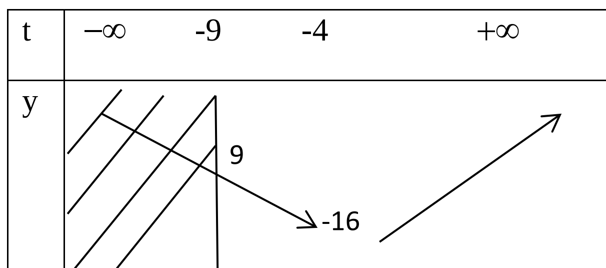
$(1)\Leftrightarrow (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=m$

Đặt $t=x^2+8x+7=(x+4)^2-9\Rightarrow t\geq -9$

Ta có phương trình $t(t+8)=m\Leftrightarrow t^2+8t=m$ (2)

Xét hàm số $y=t^2+8t$

BBT



Phương trình (1) có 4 nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $-9<t_1;t_2\Leftrightarrow -16<m<9$.
Vậy có 24 giá trị m nguyên.

Facebook: Chu Quốc Hùng edu

Email: giachuan85@gmail.com

Câu 20. Cho phương trình: $\sqrt{25x^2-20x+4}+\sqrt{25x^2-30x+9}+x^2-x-m^2+\frac{5}{4}=0\ (1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình (1) vô nghiệm.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Tác giả: Trần Gia Chuân Tên FB: Trần gia Chuân

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$\sqrt{25x^2-20x+4}+\sqrt{25x^2-30x+9}+x^2-x-m^2+\frac{5}{4}=0\ (1)$

$\Leftrightarrow |5x-2|+|3-5x|+x^2-x-m^2+\frac{5}{4}=0$

$\Leftrightarrow |5x-2|+|3-5x|+x^2-x+\frac{5}{4}=m^2 \quad (2)$

+ Do $\begin{cases} |5x-2|+|3-5x|\ge|5x-2+3-5x|=1\ \forall x\in\mathbb{R}\ (3) \\ x^2-x+\frac{5}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\ge 1\ \forall x\in\mathbb{R}\ (4)\end{cases}$.

$\Rightarrow VT=|5x-2|+|3-5x|+x^2-x+\frac{5}{4}\ge 2$, như vậy vế trái của (2) có tập giá trị là $[2;+\infty)$

Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow m^2<2\Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-1;0;1\}$

Câu 21. Biết rằng phương trình $2x+(x^2+1)\sqrt{1-x^2}=m+x^3$ (m là tham số) có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left[a;\sqrt{\frac{b}{c}}\right]$. Biết $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản, giá trị của $b-a-c$ bằng

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải (CáCh giải Cho HS lớp 10)

Chọn C

□ Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}$ (1), phương trình đã cho trở thành $t^3+t=2m\ \ (*)$

□ Tìm điều kiện cho t: Coi (1) là phương trình ẩn x tham số t

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} t\ge x \\ 2x^2-2tx+t^2-1=0\ (2)\end{cases}$.

Xét (2), ta có $\Delta=2-t^2$.

(2) có nghiệm khi và chỉ khi $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Với $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, (2) có hai nghiệm $x_1=\frac{t-\sqrt{2-t^2}}{2}$, $x_2=\frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2}$.

(2)Có nghiệm khi và chỉ khi $t\ge x_1\Leftrightarrow t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.

□ Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$

- Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên R suy ra: $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi $f(-1)\le 2m\le f\left(\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow -1\le m\le \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Nhận xét

Có thể đặt điều kiện cho t như sau:

Điều kiện cho $t=x+\sqrt{1-x^2}$

- $x\in[-1;1]\Rightarrow t\ge -1\,(i)$.
- Lại có $t^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\le 2\,(ii)$
- Từ (i) và (ii) suy ra $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$

Email: dunghung22@gmail.com

Câu 22. Cho phương trình $\left(x^2-3x-4\right)\sqrt{x+7}-m\left(x^2-3x-4-\sqrt{x+7}\right)-m^2=0$. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình có số nghiệm thực nhiều nhất.

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Tác giả : Hoàng Dũng,Tên FB: HoangDung

Chọn C

ĐK: $x\ge -7$

$\left(x^2-3x-4\right)\sqrt{x+7}-m\left(x^2-3x-4-\sqrt{x+7}\right)-m^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-4+m\right)\left(\sqrt{x+7}-m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-3x-4+m=0 & (*) \\ \sqrt{x+7}=m & (**) \end{array}\right.$

$ycbt\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta=25-4m>0 \\ m\ge 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le m<\frac{25}{4}$

$\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$

Thay các giá trị m vào (*) và (**) kiểm tra không có nghiệm trùng nhau và thỏa mãn ĐK $x\ge -7$.

Lê Thái Bình Mail: lebinhle80@gmail.com

Facebook: Lê Thái Bình

Câu 23. Cho phương trình $m\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=m$ trong đó m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm và hai nghiệm đó thỏa mãn bất phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-2m-2\le 0$.

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Giải. Điều kiện $x\ge 0$

Với điều kiện trên phương trình

$\leftrightarrow m\left(\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x}-1\right)=0\leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(m-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\sqrt{x+1}=m\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=m^2-1\end{array}\right.$ trong đó $m\ge 1$ $(*)$.

TH1:

Nghiệm $x=1$ thỏa mãn bất phương trình đã cho $\leftrightarrow m^2-m-2\le 0\leftrightarrow -1\le m\le 2\to 1\le m\le 2$ do (*).

TH2:

Mặt khác nghiệm $x=m^2-1$ thỏa mãn bất phương trình đã cho

$\leftrightarrow m^2\left(m^2-2m-2\right)\le 0\to m^2-2m-2\le 0\leftrightarrow\frac{1-\sqrt{3}}{2}\le m\le\frac{1+\sqrt{3}}{2}\to 1\le m\le\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

do (*).

Email: ***lethuhAng2712@gmAil.Com***

Câu 24. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{4x+m-1}=x-1$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Tác giả : Lê Thị Thu Hằng,Tên FB: Lê Hằng

Chọn B

$\sqrt{4x+m-1}=x-1$ (1)

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\4x+m-1=x^2-2x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-6x+2=m\end{cases}$ (2)

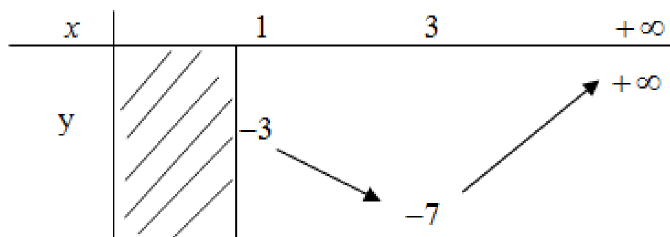
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \geq 1$

Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đường thẳng $y = m$

và parabol (P): $y = x^2 - 6x + 2$

Bảng biến thiên:



Vậy $-7 < m \leq -3$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; -5; -4; -3\}$.

Email: **manhluonghl4@gmail.com**

Câu 25. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 - 2x + 2\left(x - \sqrt{2x+m}\right)\left(\sqrt{x}+1\right) - m = 0$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3]$. Khi đó tổng các phần tử của S là:

A. 6 **B.** 5 **C.** -1 **D.** 3

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Mạnh,Tên FB: Nguyễn Văn Mạnh

Chọn B

Đk: $\begin{cases} 2x + m \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (*)

Ta có pt $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2x\sqrt{x} + 2x - 2\sqrt{x(2x+m)} - 2\sqrt{2x+m} - m = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x} + x + 2x = 2x + m + 2\sqrt{x(2x+m)} + x + 2\sqrt{2x+m}$

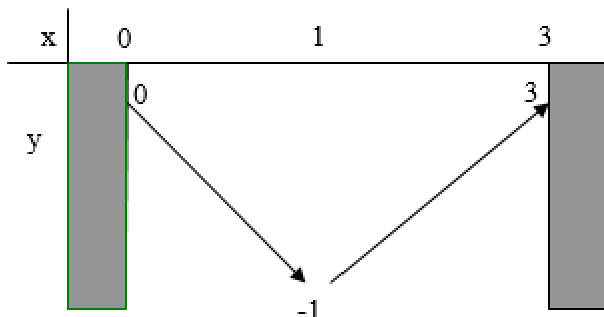
$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x}\right)^2 + 2\left(x + \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x} + \sqrt{2x+m}\right)^2 + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x+m}\right)$

Đặt $\begin{cases} a = x + \sqrt{x} \\ b = \sqrt{x} + \sqrt{2x+m} \end{cases}$ (vì đk (*) nên $a, b \geq 0$), ta có phương trình:

$a^2 + 2a = b^2 + 2b \Leftrightarrow (a-b)(a+b+2) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (vì $a + b + 2 > 0$ với mọi $a, b \geq 0$).

Khi đó $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}+\sqrt{2x+m} \Leftrightarrow \sqrt{2x+m}=x \Leftrightarrow x^2-2x=m$ (do đk (*))

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3] \Leftrightarrow$ pt $x^2-2x=m$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3]$. Xét hàm số $y=x^2-2x$ với $x\in[0;3]$, ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có pt $x^2-2x=m$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0;3] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ 0<m\le 3 \end{array}\right.$

Vì m nguyên nên $m\in\{-1;1;2;3\} \Rightarrow S=\{-1;1;2;3\}$ nên tổng các phần tử của S là $5 \Rightarrow$ **Chọn B**

Email: kientoanhl2@gmail.com

Câu 26. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $0<x+y\le 1$. Biết m_0 là giá trị của tham số m để phương trình $x+y+\sqrt{2xy+m}=1$ có nghiệm $(x_0;y_0)$ duy nhất. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $m_0\in(0;1)$. **B.** $m_0\in(-1;0)$. **C.** $m_0>2$. **D.** $m_0<-1$.

Lời giải

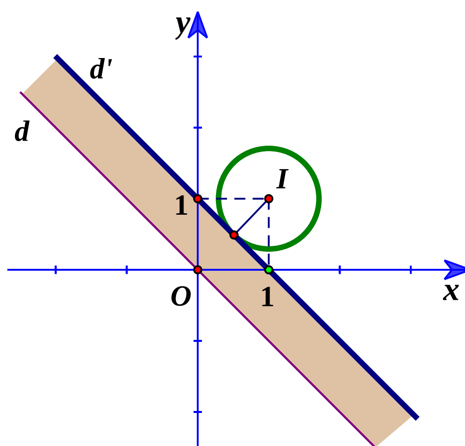
Tác giả: Nguyễn Trung Kiên.,Tên FB: Nguyễn Trung Kiên

Chọn B

Theo giả thiết ta được:

$$\begin{cases} 0<x+y\le 1 \\ \sqrt{2xy+m}=1-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x+y\le 1 \\ 2xy+m=1-2x-2y+(x+y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x+y\le 1 & (1) \\ (x-1)^2+(y-1)^2=m+1 & (2) \end{cases}.$$

Tập nghiệm của (1) là phần nằm giữa hai đường thẳng $d: y=-x$ và $d': y=-x+1$, kể cả d' nhưng không kể d; (phần tô đậm trong hình vẽ).



- Nếu $m<-1$ thì (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

- Nếu $m=-1$ thì (2) có nghiệm duy nhất $x=y=1$, không thỏa mãn (1), do đó hệ vô nghiệm.

- Nếu $m>-1$ thì tập nghiệm của (2) là đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R=\sqrt{m+1}$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi d' là tiếp tuyến của đường tròn (C)

Nghĩa là : $d(I,d')=R \Leftrightarrow \sqrt{m+1}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$. Vậy $m_0=-\frac{1}{2}\in(-1;0)$.

Email: Samnk.thptnhuthanh@gmail.com

Câu 27. Cho phương trình: $\sqrt{x-2}-4\sqrt[4]{x^2-2x}+(5-m)\sqrt{x}=0$. (m- tham số). Gọi T là tập tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm. Khi đó, tổng các phần tử của T là:

A. $S=14$ **B.** $S=12$ **C.** $S=15$ **D.** $S=9$

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Khắc Sâm,Tên FB: Nguyễn Khắc Sâm

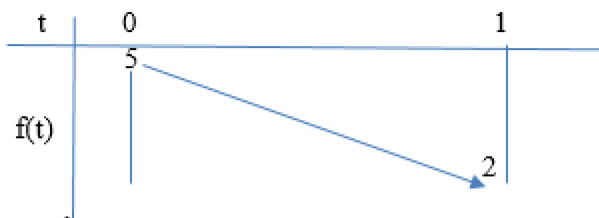
Chọn B

ĐK: $x\ge 2$ PT $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x}}-4\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}+5-m=0$. Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}$, Khi đó:

$0\le t=\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}<1$; phương trình trở thành:

$t^2-4t+5-m=0 \Leftrightarrow t^2-4t+5=m. \quad \forall t\in[0;1)$.

Xét hàm: $f(t)=t^2-4t+5$ trên $[0;1)$ ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có: $2 < m \le 5$ Vậy $T = \{3;4;5\}$, do đó chọn **B.**

Email: PhongvAthAo@gmAil.Com

Câu 28. Số giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+4\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=\dfrac{x+2m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

***Tác giả :* Nguyễn Thị Hồng Gấm,*Tên FB:* Nguyễn Thị Hồng Gấm**

Lời giải

Chọn B

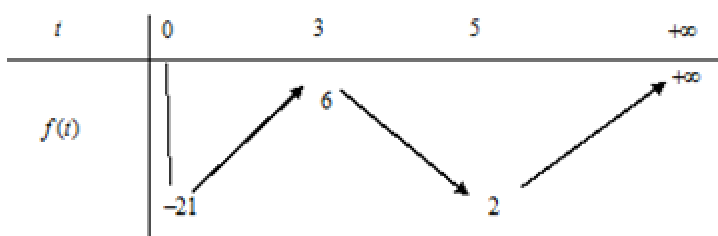
Phương trình đã cho tương đương: $\sqrt{x-9}+3+4\left|\sqrt{x-9}-3\right|=\dfrac{x+2m}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{x-9}$ $(t\ge 0)$ ta thu được phương trình $t^2-2t-8\left|t-3\right|+3=-2m$ $(t\ge 0)$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f(t)=t^2-2t-8\left|t-3\right|+3$ và $y=-2m$ $(t\ge 0)$.

Ta có: $f(t)=\begin{cases} t^2-10t+27; & (t\ge 3)\\ t^2+6t-21; & (0\le t<3)\end{cases}$

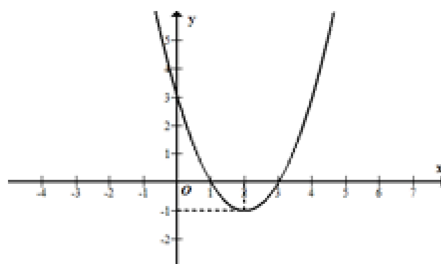
và có BBT của hàm số này:



Từ BBT suy ra pt có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi
$2<-2m<6 \Leftrightarrow -3<m<-1$. Vậy $m=-2$.

Email: nghiAnguyennhAn78@gmAil.Com

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\ne 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để phương trình $\sqrt{f\left(\left|x\right|\right)+1}=2m+3-2f\left(\left|x\right|\right)$ có bốn nghiệm phân biệt

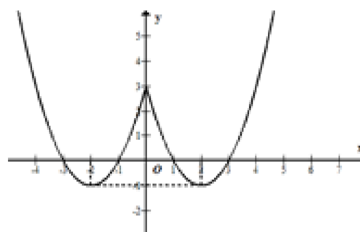


A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3

Tác giả : Nguyễn Thị Thanh Thảo,Tên FB: Nguyễn Thanh Thảo

Lời giải

Chọn B



Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.

Suy ra: $f(|x|) \geq -1$

Đặt $t = \sqrt{f(|x|)+1} \geq 0 \Rightarrow f(|x|) = t^2 - 1$

Suy ra cứ 1 giá trị của $f(|x|)$ thỏa mãn $-1 < f(|x|) < 3$ sẽ sinh ra 4 giá trị của x.

Hay cứ 1 giá trị của t thỏa mãn $0 < t = \sqrt{f(|x|)+1} < 2$ sẽ sinh ra 4 giá trị của x.

Phương trình

$$\sqrt{f(|x|)+1} = 2m + 3 - 2f(|x|) \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t = 2m + 3 - 2(t^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 2t^2 + t - 5 = 2m \, (*) \end{cases}$$

Đặt hàm số $y = g(t) = 2t^2 + t - 5$ và có bảng biến thiên :

t	0		2
$g(t)$			5
		↗	
	-5		

Để phương trình $\sqrt{f\left(\left|x\right|\right)+1}=2m+3-2f\left(\left|x\right|\right)$ có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có 1 nghiệm $t_1\in\left(0;2\right)\Rightarrow 0<t_1<2\Rightarrow -5<2m<5\Rightarrow \frac{-5}{2}<m<\frac{5}{2}$. .

Mà m nguyên không âm nên $m\in\left\{1;2\right\}$.

Họ và tên: Nguyễn Văn Nho

Email: ngvnho93@gmail.com

Facebook: Nguyễn Văn Nho

Câu 30. Cho phương trình: $\frac{3mx+1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\frac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}$. Để phương trình có nghiệm, điều kiện để thỏa mãn tham số m là :

A. $0<m<\frac{1}{3}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\frac{1}{3}\end{array}\right.$. **C.** $-\frac{1}{3}<m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-\frac{1}{3}\\ m>0\end{array}\right.$.

Lời giải

Tác giả : Nguyễn Văn Nho,Tên FB: Nguyễn Văn Nho

Chọn B

Xét phương trình $\frac{3mx+1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\frac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}$ (1)

Điều kiện: $x>-1$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow 3mx+1+x+1=2x+5m+3 \Leftrightarrow \left(3m-1\right)x=5m+1 \quad \left(2\right)$

Phương trình $\left(1\right)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(2\right)$ vô nghiệm hoặc phương trình $\left(2\right)$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn bằng -1

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3m-1=0\\ 5m+1\ne 0\end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l}3m-1\ne 0\\ \frac{5m+1}{3m-1}\le -1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{1}{3} \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l}m\ne\frac{1}{3}\\ \frac{8m}{3m-1}\le 0\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$ hoặc $\begin{cases} m\neq \dfrac{1}{3} \\ 0\le m<\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$ hoặc $0\le m<\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 0\le m\le \dfrac{1}{3}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi $m<0$ hoặc $m>\dfrac{1}{3}$.

Email : Oanhhlqt@gmail.com

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m+x}-\sqrt{\dfrac{m^2}{m+x}}=\sqrt{2m+x}$ có đúng một nghiệm nhỏ hơn 10.

A. 5. **B.** 4. **C.** 9. **D.** vô số.

Tác giả: Nguyễn Văn Oánh Tên FB: Nguyễn Văn Oánh

Chọn B

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} m+x-|m|=\sqrt{2m+x}.\sqrt{m+x} \\ m+x>0 \end{cases} (\text{I})$

+ Xét $m=0:(\text{I})\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x}.\sqrt{x} \\ x>0 \end{cases}$ mọi $x>0$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

+Xét $m>0:(\text{I})\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2m+x}.\sqrt{m+x} \\ m+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=(2m+x)(m+x) \\ x\ge 0 \\ m+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2m}{3}<0 \\ x\ge 0 \\ m+x>0 \end{cases}$ vô nghiệm.

+ Xét $m<0:(\text{I})\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+x=\sqrt{2m+x}.\sqrt{m+x} \\ m+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+x)^2=(2m+x)(m+x) \\ m+x>0 \\ 2m+x\ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2m \\ 2m + x \ge 0 \\ m + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2m.$$

Vì $x = -2m < 10 \Leftrightarrow m > -5 \xrightarrow[m<0]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

Email: dovancuongthptln@gmail.com

Câu 32. Cho phương trình $\dfrac{mx\sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} = x^2 - x + 1$(với m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thực dương là $\left[\dfrac{a}{b}; +\infty\right)$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=7$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=8$

***Tác giả*:** Đỗ Văn Cường Tên Facebook: Cường Đỗ Văn

Lời giải

Chọn B

$$\frac{mx\sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \frac{mx\sqrt{x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1}}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{x^2 + x + 5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x + 2 + \frac{1}{x}} = x - 1 + \frac{1}{x}, \text{do } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} + 3}}{x + \frac{1}{x} + 2} = x + \frac{1}{x} - 1$$

+)Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \ge 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} \ge 2$

Ta có

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{t^2 + t + 3}}{t + 2} = t - 1$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{t^2 + t + 3} = t^2 + t - 2$$

+)Đặt $u = \sqrt{t^2 + t + 3}, u \ge 3$

Phương trình trở thành $u^2 - mu - 5 = 0(*)$

+)Phương trình đầu có nghiệm thỏa mãn đề bài

$\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $u \geq 3$

Vì ta có $a.c = -5 < 0$ nên (*) luôn có hai nghiệm trái dấu u_1, u_2

$\Rightarrow u_1 < 3 \leq u_2 \Leftrightarrow (u_1 - 3)(u_2 - 3) \leq 0 \Leftrightarrow u_1u_2 - 3(u_1 + u_2) + 9 \leq 0 \Leftrightarrow -5 - 3m + 9 \leq 0 \Rightarrow m \geq \frac{4}{3}$

$\Rightarrow a = 4, b = 3 \Rightarrow a + b = 7$

VDC PT-HPT CHỨA CĂN

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình : $\sqrt{4-x^2}-mx-2+m=0$ có hai nghiệm phân biệt

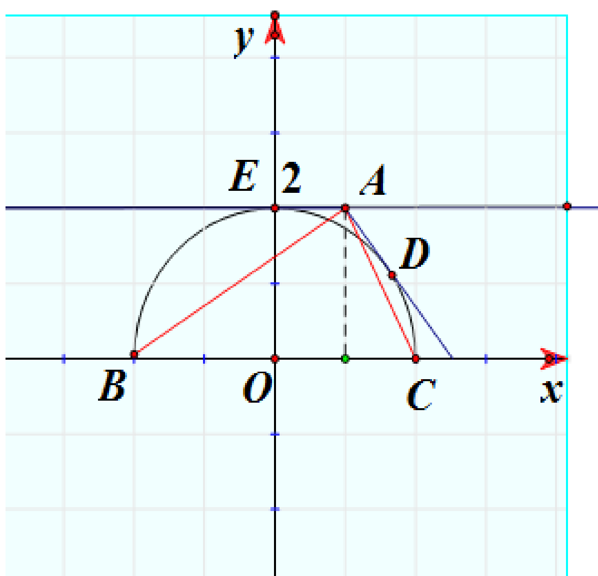
A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Đk : $-2 \le x \le 2$,

Đặt $\sqrt{4-x^2}=y \ge 0$, $(1) \Rightarrow y=mx+2-m$ (d)

+ Điều kiện bài toán tương đương nửa đường tròn tâm $O(0;0), r=2$ (phần trên trục hoành) cắt (d) tại hai điểm phân biệt



+ (d): đi qua điểm cố định $A(1;2), \forall m$

+ Qua A có hai tiếp tuyến với đường tròn là đường thẳng $y=2$ và AD

+ Gọi k_1, k_2, k_3, k_4 lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng AC, AD, AB, AE

+ Ta có $k_1=-\tan\widehat{ACO}=-2$, $k_2=\tan\widehat{EAD}=\frac{-4}{3}$ (vì $\tan\widehat{EAO}=2$ $k_3=\tan\widehat{ABO}=\frac{2}{3}$, $k_4=0$

Vậy để phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $0<m\le\frac{2}{3}$ hoặc $-2\le m<\frac{-4}{3}$

Với $m\in Z \Rightarrow m=-2$, vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn.

Họ và tên tác giả : Nguyễn Văn Toản

Tên FB: Dấu Vết Hát

Email: nguyenvantoannbk@gmail.com *Bài ở mức độ VDC, nhờ thầy cô góp ý!*

Câu 2. Gọi S là tập hợp các giá trị của a để phương trình $x^2-\sqrt{a-x}=a$ có hai nghiệm phân biệt. Khi đó S là tập con của tập hợp nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **B.** $(-8;0)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(-9;2019)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

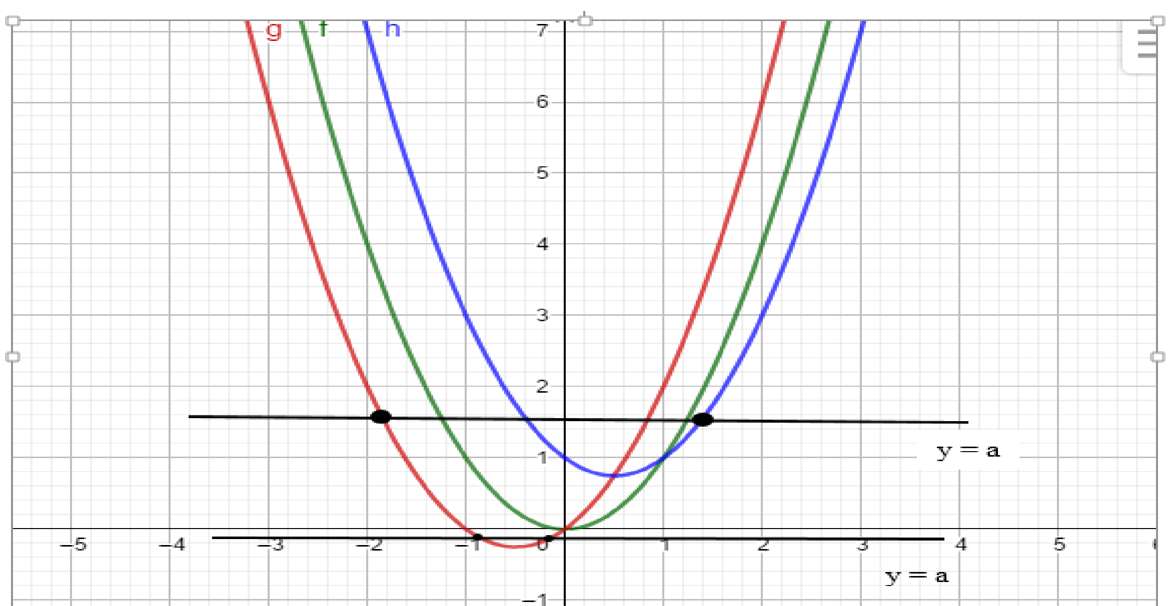
Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $x^2-\sqrt{a-x}=a\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-a)^2=a-x\\x^2-a\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+x-a)(x^2-x+1-a)=0\\x^2-a\ge 0\end{cases}$

Nghiệm của phương trình là giao diểm của đường thẳng $y=a$ với hợp của hai parabol $y=x^2+x$ & $y=x^2-x+1$ đồng thời nằm dưới parabol $y=x^2$. Vẽ và dựa vào hình ta được :



+) $-\dfrac{1}{4} < a \le 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

+) $a \ge 1$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$; $x = \dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$

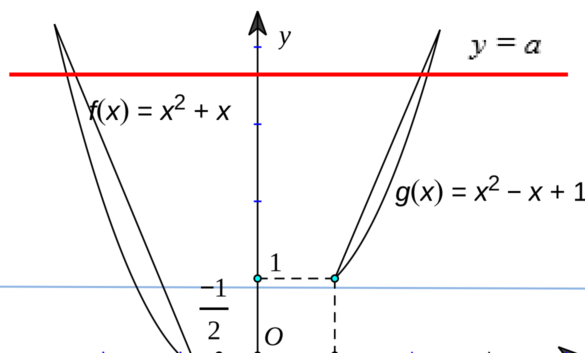
$\Rightarrow S = \left(-\dfrac{1}{4};0\right] \cup [1;+\infty)$. **Vậy chọn D.**

Cách 2 :

Ta có :

$x^2 - \sqrt{a-x} = a \Leftrightarrow x^2 - (a-x) = x + \sqrt{a+x} \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{a-x}\right)\left(x-\sqrt{a-x}+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a-x} = -x \\ \sqrt{a-x} = x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ x^2 + x = a \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - x + 1 = a \end{cases} \end{array}\right.$



Dựa vào hình vẽ ta thấy:

$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4} < a \le 0 \\ a \ge 1 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow S = \left(-\frac{1}{4};0\right] \cup [1;+\infty)$. **Vậy chọn D.**

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thu FB: Nguyễn Phương Thu

Email: phuongthu081980@gmAil.Com

Email: huyenvanqt050185@gmail.com

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = m$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

Họ và tên tác giả: Võ Khánh Huyền Vân Tên Fb: Vân Võ.

Cách 1:

Chọn A

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = m \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = m$$

Trong mặt phẳng tọa độ, chọn $A\left(-\frac{1}{2};0\right), B\left(\frac{1}{2};0\right), M\left(x;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Khi đó phương trình được viết lại $MA - MB = m$.

Mặt khác, $|MA - MB| < AB = 1$ (Vì $A, B \in Ox, M \notin Ox$) nên $|m| < 1$. Do m nguyên nên $m = 0$.

Thử lại, $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Vậy $m = 0$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$. TXĐ: $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

Xét hàm số $g(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}$. TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(t)=\frac{3}{4\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $g(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x)=g\left(x+\frac{1}{2}\right)-g\left(x-\frac{1}{2}\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

BBT của $f(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 $\nearrow$ 1

Vậy phương trình $f(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1<m<1$. Do m nguyên nên $m=0$.

Câu 4. Biết rằng tập hợp tất cả giá trị của tham số m *để phương trình sau có nghiệm* $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ *có nghiệm là* $S=[a;b]$. *Tính* $a+b$ *?*

A. $a+b=\frac{31}{4}$ **B.** $a+b=\frac{49}{4}$ **C.** $a+b=10$ **D.** $a+b=\frac{5}{2}$

Lời giải

Họ và tên tác giả : Trần Quốc Đại ***Tên FB: www.facebook.com/tqd1671987***

Chọn A

Điều kiện: $0\le x\le 9$

PT (1) $\Leftrightarrow x+9-x+2\sqrt{x(9-x)}=-x^2+9x+m$

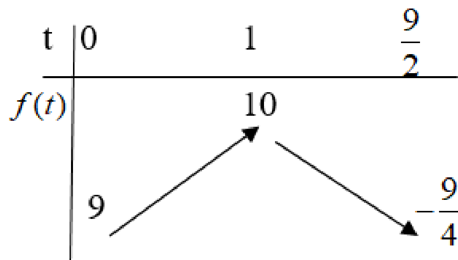
$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{-x^2+9x}=-x^2+9x+m$ *(2)*

Đặt $t=\sqrt{-x^2+9x}$ *do* $0\le x\le 9$ *suy ra* $0\le t\le \frac{9}{2}$

Phương trình (2) trở thành $9+2t=t^2+m \Leftrightarrow -t^2+2t+9=m$ (3)

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+9$, $0\le t\le \frac{9}{2}$

Bảng biến thiên :



Phương trình (1) có nghiệm $x\in[0;9] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $t\in\left[0;\frac{9}{2}\right]$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{4}\le m\le 10$. Vậy $S=\left[-\frac{9}{4};10\right] \Rightarrow a+b=\frac{31}{4}$

Email:Quocthong1182@gmail.com

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của a nguyên để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=a \quad (*)$

A. 1 **B.**0 **C.**3 **D.**Vô số

Họ và tên : Phan Quôc Thông (Sưu tầm) Fabook: Quocthongphan

Chọn đáp án A

Lời giải

- Nhận thấy nếu x_o là nghiệm thì $-x_o$ cũng là nghiệm của phương trình. Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_o=-x_o \Leftrightarrow x_o=0$.

- Thế $x_o=0$ vào $(*)$ ta được: $a=\sqrt{1-0}+2.\sqrt[3]{1-0} \Leftrightarrow a=3$.

- Thử lại: Với $a=3$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}=3 \quad (**)$

Đặt : $t=\sqrt[6]{1-x^2},\ (0\le t\le 1) \Rightarrow \begin{cases} t^2=\sqrt[3]{1-x^2} \\ t^3=\sqrt{1-x^2} \end{cases}$.

$(**) \Rightarrow t^3+2t^2-3=0 \Leftrightarrow t=1$

Nên $\sqrt[6]{1-x^2}=1 \Leftrightarrow 1-x^2=1 \Leftrightarrow x=0$ (nghiệm duy nhất).

- Vậy với $a=3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án A

- Cách 2. Khảo sát hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}+2.\sqrt[3]{1-x^2}$ trên khoảng $\left[0;1\right]$.
- Cách 3. Đặt hai ẩn phụ $\begin{cases}u=\sqrt{1-x^2}>0\\ v=\sqrt[3]{1-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=1-x^2\\ v^3=1-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-v^3=0\\ u+2v=a\end{cases}$.

Fb: Hoàng Trà

Email: tra.hoangthi@gmail.com

Câu 6. Cho phương trình $x^4+x^2+m-2=2x\sqrt{x^2+1}$ (1)

Biết tập tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;\sqrt{3}]$ là nửa khoảng [a;b). Khi đó hệ thức liên hệ giữa a và b là

A. a+b = $2\sqrt{3}$ **B.** a+b= $4\sqrt{3}-8$ **C.** a.b=12 **D.** a-b=-1

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x\sqrt{x^2+1}$ $\Rightarrow t^2=x^4+x^2$ và do $x\in[0;\sqrt{3}]$ suy ra $t\geq 0$

Với $x^2=u,u\geq 0$, $x\in[0;\sqrt{3}]$ suy ra $u\in[0;3]$ khi đó $t^2=u^2+u$,

Xét hàm số $t^2=u^2+u$, $u\in[0;3]$

u	0	3
t^2	0 ↗	12

Từ BBT ta có $t^2\in[0;12]$ $\Rightarrow t\in[0;2\sqrt{3}]$. Như vậy ứng với mỗi giá trị $t\in[0;2\sqrt{3}]$ cho ta một giá trị $u\in[0;3]$, ứng với mỗi giá trị $u\in[0;3]$ cho ta một giá trị $x\in[0;\sqrt{3}]$ tương ứng.

(1) trở thành $t^2+m-2=2t\Leftrightarrow -t^2+2t+2=m$ (2).

Vậy (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;\sqrt{3}]$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t thuộc đoạn $[0;2\sqrt{3}]$

Đặt $f(t)=-t^2+2t-2$ có đồ thị (P) . Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đồ thị (P) cắt đường thẳng $y=m$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc đoạn $[0;2\sqrt{3}]$

BBT

t	0	1	$2\sqrt{3}$
f(t)	**2** ↗	3 ↘	$-10+4\sqrt{3}$

Dựa vào BBT ta có $2 \le m < 3$. Vậy a = 2 ; b = 3, khi đó a-b=-1 nên **chọn D**

Email: trandotoanbk35@gmail.com

Câu 7. Cho phương trình $4\sqrt{6+x-x^2}-3x = m\left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\right)$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Trần Thế Độ Tên FB: Trần Độ

Chọn B

Cách 1: Dùng KT lớp 10.

+ Điều kiện: $-2 \le x \le 3$.

+ Đặt $t = \sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}$ với $x \in [-2;3]$

Ta có $t^2 = \left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\right)^2 \le \left(1^2+2^2\right)\left(x+2+3-x\right) = 25 \Rightarrow t \le 5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow 4\left(x+2\right) = 3-x \Leftrightarrow x = -1$.

Mặt khác:

$t = \sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x} \ge \sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$

$\Rightarrow t^2 \ge \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)^2 = 5+2\sqrt{\left(x+2\right)\left(3-x\right)} \ge 5$

$\Rightarrow t \ge \sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{3-x} = 0 \\ \sqrt{\left(x+2\right)\left(3-x\right)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy $t \in \left[\sqrt{5};5\right]$

+ Do $t=\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x} \Rightarrow 4\sqrt{6+x-x^2}-3x=t^2-14$ nên phương trình trở thành:

$t^2-14=mt \Leftrightarrow \dfrac{t^2-14}{t}=m$

+ Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2-14}{t}$ với $t \in \left[\sqrt{5};5\right]$

Với $\sqrt{5} \le t_1 < t_2 \le 5$ ta có

$f\left(t_1\right)-f\left(t_2\right)=t_1-\dfrac{14}{t_1}-\left(t_2-\dfrac{14}{t_2}\right)=t_1-t_2+14\left(\dfrac{1}{t_2}-\dfrac{1}{t_1}\right)=\left(t_1-t_2\right)\left(1+\dfrac{14}{t_1t_2}\right)<0 \Rightarrow f\left(t_1\right)<f\left(t_2\right) \Rightarrow$ $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{5};5\right]$

+ Phương trình có nghiệm thực $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{5}\right) \le m \le f\left(5\right) \Leftrightarrow -\dfrac{9\sqrt{5}}{5} \le m \le \dfrac{11}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm thực khi $-\dfrac{9\sqrt{5}}{5} \le m \le \dfrac{11}{5}$. Do m nguyên nên có 7 giá trị m thỏa mãn $\left\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\right\}$.

Nhận xét: Với Cách làm của lớp 10, ta thấy lời giải trên chưa chặt chẽ, bởi việc chỉ ra $\sqrt{5} \le t \le 5$ chứ chưa phải là chỉ ra miền giá trị của $t=\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}$. Nên để chặt chẽ thì phải thử lại các giá trị nguyên m tìm được.

Cách 2: Dùng KT lớp 12.

+ Điều kiện: $-2 \le x \le 3$.

+ Đặt $t=\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}$ với $x \in \left[-2,3\right]$

Ta có: $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}=\dfrac{\sqrt{3-x}-2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}}$; $t'=0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x=-1$

Bảng biến thiên:

x		-2	-1	3	
t'		$+$	0	$-$	
t		$2\sqrt{5}$ ↗	5	↘ $\sqrt{5}$	

Từ BBT suy ra: $t\in\left[\sqrt{5},5\right]$

+ Do $t=\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\Leftrightarrow 4\sqrt{6+x-x^2}-3x=t^2-14$ nên phương trình trở thành:

$t^2-14=mt\Leftrightarrow \dfrac{t^2-14}{t}=m$

+ Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2-14}{t}$ với $t\in\left[\sqrt{5},5\right]$, ta có:

$f'\left(t\right)=\dfrac{t^2+14}{t^2}>0,\forall t\in\left[\sqrt{5},5\right]\Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{5},5\right]$

+ Phương trình có nghiệm thực $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{5}\right)\le m\le f\left(5\right)\Leftrightarrow -\dfrac{9\sqrt{5}}{5}\le m\le\dfrac{11}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm thực khi $-\dfrac{9\sqrt{5}}{5}\le m\le\dfrac{11}{5}$.

Email: tranducphuong.rb@gmail.com

Câu 8. Số giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{-x^2+9x+m}-\sqrt{x}-\sqrt{9-x}=0$ có 2 nghiệm phân biệt là

A. 9. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Phương trình trở thành $\sqrt{-x^2+9x+m}=\sqrt{x}+\sqrt{9-x}$ ĐK $x\in\left[0;9\right]$

Khi đó $-x^2+9x+m=x+2\sqrt{x\left(9-x\right)}+9-x\Leftrightarrow m=-\left(9x-x^2\right)+2\sqrt{9x-x^2}+9$

Đặt $t=\sqrt{9x-x^2}$ với $t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$. Phương trình trên trở thành $m=-t^2+2t+9$ với $t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=-t^2+2t+9$ (**) với $t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$.

t	0	1	$\frac{9}{2}$
g(t)	9 ↗	10	↘

	$-\frac{9}{4}$

Từ $t=\sqrt{9x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ x^2-9\text{x}+\text{t}^2=0\ (*) \end{cases}$ ta thấy ứng với mỗi $t\in\left[0;\frac{9}{2}\right)$ PT (*) có hai nghiệm phân biệt và $t\ =\frac{9}{2}$ PT (*) có nghiệm duy nhất. Do đó PT đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (**) có nghiệm duy nhất $t\in\left[0;\frac{9}{2}\right)$.

Từ bảng biến thiên trên ta tìm được $m\in\left(-\frac{9}{4};9\right)\cup\{10\}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ ta được $m\in\{-2;-1;0;1;...;7;8;10\}$

Họ và tên tác giả: Trần Đức Phương ***Tên FB: Trần Đức Phương***

Email: quangtqp@gmail.com

Câu 9. Biết rằng với $m\in[a;b)$ thì phương trình $3\sqrt{x-3}+m\sqrt{x+3}=2\sqrt[4]{x^2-9}$ có đúng 2 nghiệm phân biệt. Tính $a-3b$.

A. 0 **B.** -1 **C.** -2 **D.** 2

Lời giải

Họ và tên tác giả: Phí Văn Quang ***Tên FB: QuangPhi***

Chọn B

Xét phương trình $3\sqrt{x-3}+m\sqrt{x+3}=2\sqrt[4]{x^2-9}$ (1)

ĐKXĐ: $x\ge 3$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+3}>0$ ta có

$(1)\Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}+m=2\frac{\sqrt[4]{x^2-9}}{\sqrt{x+3}}\Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}+2\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+3}}=m$ (2)

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+3}}=\sqrt[4]{1-\frac{6}{x+3}}\Rightarrow 0\le t<1$

Phương trình (2) trở thành $-3t^2+2t=m$ (3)

Xét hàm số $y=-3t^2+2t$ trên $[0;1)$, ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$, $y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{3}$	1
y	0 ↗	$\frac{1}{3}$	↘ -1

Ta có $t=\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+3}}\Rightarrow t^4\left(x+3\right)=x-3\Leftrightarrow\left(1-t^4\right)x=3t^4+3$ (*)

Với mỗi giá trị $t\in\left[0;1\right)$ thì phương trình (*) có một nghiệm $x=\frac{3t^4+3}{1-t^4}$.

Do đó phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có đúng 2 nghiệm phân biệt $t\in[0;1)$ $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=-3t^2+2t$ và đường thẳng $y=m$ có đúng 2 điểm chung trên $[0;1)$

$\Leftrightarrow 0\le m<\frac{1}{3}$

Do vậy phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0\le m<\frac{1}{3}$ hay $m\in\left[0;\frac{1}{3}\right)$.

Vậy $a-3b=-1$

Email: huanpv@dtdecopark.edu.vn

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+\sqrt{5+4x-x^2}=4x+m-103$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Họ và tên tác giả : Phạm Văn Huấn Tên FB: Pham Van Huan

Lời giải

Chọn A

ĐKXĐ $x\in\left[-1;5\right]$. Đặt $t=\sqrt{5+4x-x^2}=\sqrt{9-\left(x-2\right)^2}$ nên $0\le t\le 3$ hay $t\in\left[0;3\right]$

Ta được PT $-t^2+t+108=m$ (*).

Xét hàm $g\left(x\right)=-x^2+4x+5$ trên $\left[-1;5\right]$

x		-1 2 5	

g(x)		0	9	0	

Từ bảng biến thiên ta thấy với mỗi $t \in [0;3)$ thì PT đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Xét $y = f(t) = -t^2 + t + 108$ với $t \in [0;3]$

t		0	$\frac{1}{2}$	3	
f(t)		108	$\frac{433}{4}$	102	

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy PT (*) có hai nghiệm phân biệt $t \in [0;3)$ khi và chỉ khi $108 \le m < \frac{433}{4}$.

Do đó có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Email: tranght145@gmail.com

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt?

$$\sqrt{x^3 + \frac{m}{8}} + 3\sqrt{12 - x^3} = 10$$

A. 15. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Trang ***Tên FB: Trang Nguyen***

Chọn C

Cách 1: $\sqrt{x^3 + \frac{m}{8}} + 3\sqrt{12 - x^3} = 10$ (1)

Hướng nhìn bài toán : $X + 3Y = 10 \xrightarrow{PTTS} \begin{cases} X = 1 + 3t \\ Y = 3 - t \end{cases}$

(quy về bậc nhất để xuất hiện phương trình đường thẳng)

Điều kiện : $\sqrt[3]{-\frac{m}{8}} \le x \le \sqrt[3]{12}$

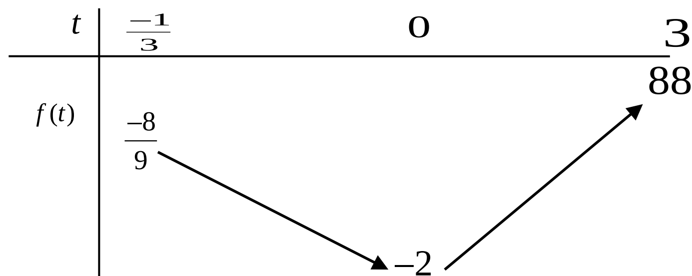
Đặt: $\sqrt{x^3+\frac{m}{8}}=1+3t$, ta có $1+3t\ge 0\Leftrightarrow t\ge\frac{-1}{3}$

$\sqrt{12-x^3}=3-t$, ta có $3-t\ge 0\Leftrightarrow t\le 3$

Ta có: $\begin{cases}x^3+\frac{m}{8}=(1+3t)^2\\12-x^3=(3-t)^2\end{cases}\Rightarrow\frac{m}{8}=10t^2-2\ (2)$

Xét hàm f(t)= $10t^2-2\ \forall t\in\left[\frac{-1}{3};3\right]$

Ta có bảng biến thiên sau:



NX Với mỗi giá trị $t\in\left[\frac{-1}{3};3\right]$ thì sẽ cho ta 1 giá trị $x\in\left[\sqrt[3]{-\frac{m}{8}};\sqrt[3]{12}\right]$

Nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<\frac{m}{8}\le-\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow -16<m\le\frac{-64}{9}$

Do m nguyên âm nên $m\in\{-15,-14,-13,...,-8\}$ có 8 giá trị thõa mãn.

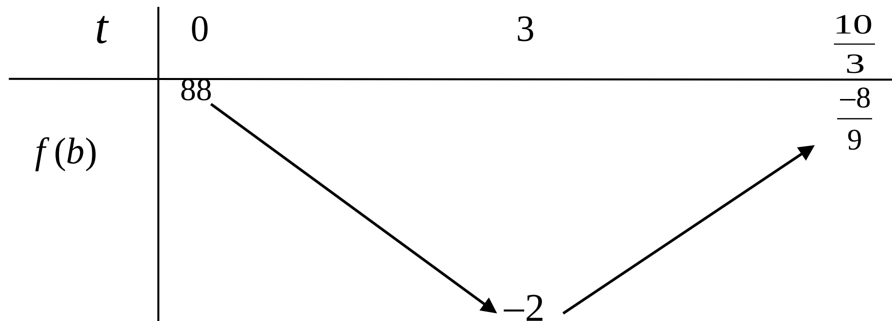
Cách 2: pt: $\sqrt{x^3+\frac{m}{8}}+3\sqrt{12-x^3}=10\ (1)$

Điều kiện : $\sqrt[3]{-\frac{m}{8}}\le x\le\sqrt[3]{12}$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x^3+\frac{m}{8}} & (a\ge 0)\\ b=\sqrt{12-x^3} & (b\ge 0)\end{cases}$

Ta có hệ $\begin{cases}a+3b=10\\a^2+b^2=\frac{m}{8}+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=10-3b & (a\ge 0\Rightarrow b\le\frac{10}{3})\\ \frac{m}{8}=10b^2-60b+88 & (*)\end{cases}$

Xét hàm f(b)= $10b^2-60b+88\ \forall b\in\left[0;\frac{10}{3}\right]$



Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<\frac{m}{8}\le-\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow -16<m\le\frac{-64}{9}$

Do m nguyên âm nên $m\in\{-15,-14,-13,...,-8\}$ có 8 giá trị thõa mãn.

Cách 3 PT $\sqrt{x^3+\frac{m}{8}}+3\sqrt{12-x^3}=10\ (1)$

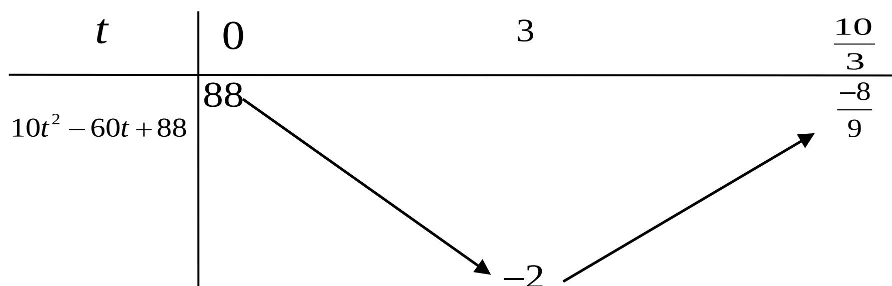
Đặt t= $\sqrt{12-x^3}$ Ta có: $\begin{cases}t\ge0\\x^3=12-t^2\end{cases}$

$$\sqrt{12-t^2+\frac{m}{8}}=10-3t$$

PTTT: $\Leftrightarrow 12-t^2+\frac{m}{8}=100-60t+9t^2$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{8}=10t^2-60t+88$$

Ta có bảng



NX : Với mỗi giá trị $t\in\left[\frac{-1}{3};3\right]$, cho 1 nghiệm của phương trình

Phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow -2<\frac{m}{8}\le-\frac{8}{9}\Leftrightarrow -16<m\le\frac{-64}{9}$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-15,-14,-13,...,-8\}$ có 8 giá trị thõa mãn.

Câu 12. Biết rằng phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}-2x-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khi $m \geq \frac{a}{b}$ với a,b nguyên dương và $(a,b)=1$. Tính $a+b$.

A. $a+b=21$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=11$. **D.** $a+b=9$.

Họ và tên: Hoàng Nhàn, fb: Hoàng Nhàn

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{x^2+mx+2}-2x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+mx+2}=2x+1 \ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^2+mx+2=(2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2+(4-m)x-1=0 \ (2) \end{cases}.$$

Cách 1: Dùng định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai

Đặt $f(x)=3x^2+(4-m)x-1$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(4-m)^2+12>0 \\ \frac{4-m}{6}>-\frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{4-m}{2}-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m \geq \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$.

$\Rightarrow a=9, b=2 \Rightarrow a+b=11$.

Cách 2: Dùng Vi - ét

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(4-m)^2+12>0 \\ \left(x_1+\frac{1}{2}\right)\left(x_2+\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2} \geq 0 \\ x_1+x_2+1>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.\frac{m-4}{3}+\frac{1}{4} \geq 0 \\ \frac{m-4}{3}+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{9}{2} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}.$$

$\Rightarrow a=9, b=2 \Rightarrow a+b=11$.

Cách 3: Dùng hàm số

$(2) \Leftrightarrow m=3x-\frac{1}{x}+4 \ (3)$ (Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình)

Xét hàm số $f(x)=3x-\frac{1}{x}+4 \Rightarrow f'(x)=3+\frac{1}{x^2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{2} \xleftrightarrow{BBT} m \geq \frac{9}{2}$.

$\Rightarrow a=9, b=2 \Rightarrow a+b=11$.

Câu 13. Cho phương trình: $\sqrt{x^2+2m^2x+m^4+81}+\sqrt{x^4+2x^2+2}=\sqrt{\left(x^2+x+m^2+1\right)^2+100}$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m nguyên thuộc đoạn [-10;50] để phương trình trên có hai nghiệm trái dấu. Tính tổng các phần tử của S ta được:

A. 1210 **B.** 1220 **C.** 1269 **D.** 0

Tác giả: Trần Phương

FB: Phuong tran

LG: Chọn **B**

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+m^2\right)^2+9^2}+\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+1}=\sqrt{\left(x^2+x+m^2+1\right)^2+10^2}$$

Đặt: $\begin{cases}\vec{u}=\left(x+m^2;9\right)\\ \vec{v}=\left(x^2+1;1\right)\end{cases} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=\left(x^2+x+m^2+1;10\right) \Rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{\left(x^2+x+m^2+1\right)^2+10^2}=VP$

Ta có: $VT=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=VP$.

Dấu "=" xảy ra khi và $\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{x+m^2}{x^2+1}=\frac{9}{1}>0 \Leftrightarrow 9x^2-x+9-m^2=0 (*)$

Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 9\left(9-m^2\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3\\ m>3\end{array}\right.$ mà m nguyên thuộc $[-10;50]$

$\Rightarrow m \in \{-10;-9;...;-4;4;5;...;50\}$.

Vậy tổng các giá trị của m là: $S = 11 + 12 + ... + 50 = \dfrac{(11+50)40}{2} = 1220$

Chọn **B**

Email: pvbinh161187@gmail.com

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$\sqrt{25-x^2} - \frac{m}{\sqrt{25-x^2}} - 4 = 0 \quad (1)$$

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 15.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Phan Văn Bình ***Tên FB: bình phan văn***

Chọn B

Điều kiện: $-5 < x < 5$

Đặt $t = \sqrt{25-x^2}$, suy ra $t \in (0;5]$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow t - \dfrac{m}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t = m$

Xét $f(t) = t^2 - 4t$ trên $(0;5]$

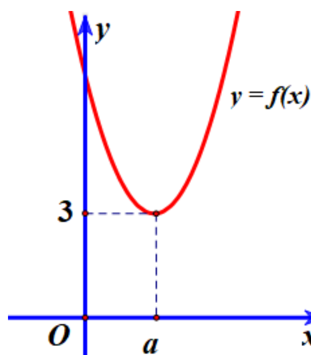
t		0	2	5	
f(t)		0 ↗	-4 ↘	5	

Từ bảng biến thiên ta được: $-4 \le m \le 5$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Mail: Duyleag@gmail.com

Câu 15. Cho hàm bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm m để phương trình $\sqrt{2f^2(x)-(m^2-4m+23)f(x)+4m^2-16m+76}=8-f(x)$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m\in[-2;0)\cup(4;6]\setminus\{2\pm\sqrt{5}\}$.

B. $m\in[-1;0)\cup(4;5]\setminus\{2\pm\sqrt{5}\}$.

C. $m\in[-1;5]$.

D. $m\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Họ và tên: Lê Duy Tên Facebook: Duy Lê

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{2f^2(x)-(m^2-4m+23)f(x)+4m^2-16m+76}=8-f(x)\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le 8\\ 2f^2(x)-(m^2-4m+23)f(x)+4m^2-16m+76=[8-f(x)]^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le 8\\ f^2(x)-(m^2-4m+7)f(x)+4m^2-16m+12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le 8\\ f^2(x)-(m^2-4m+7)f(x)+4(m^2-4m+3)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le 8\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=4\\ f(x)=m^2-4m+3=(m-2)^2-1\end{array}\right.\end{cases}$$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(x)=4$ có hai nghiệm phân biệt. Suy ra (1) có 4 nghiệm phân biệt khi $f(x)=(m-2)^2-1$ có 2 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình $f(x)=4$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3<(m-2)^2-1\le 8 \\ (m-2)^2-1\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-2|>2 \\ |m-2|\le 3 \\ m\ne 2\pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \\ -1\le m\le 5 \\ m\ne 2\pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow m\in[-1;0)\cup(4;5]\setminus\{2\pm\sqrt{5}\}$$

Mail: Duyleag@gmail.com

Câu 16. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$(mx-1)\sqrt{16x-28}+2\sqrt{2x^4+6x^3+12x^2+40x+48}=(3+m^2)x^2+2(3-m)x+10$$

Số phần tử của S là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Họ và tên: Lê Duy Tên Facebook: Duy Lê

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} 16x-28\ge 0 \\ 2x^4+6x^3+12x^2+40x+48\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{7}{4} \\ (x+2)^2(2x^2-2x+12)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{7}{4}$

Ta có $(mx-1)\sqrt{16x-28}+2\sqrt{2x^4+6x^3+12x^2+40x+48}=(3+m^2)x^2+2(3-m)x+10$

$\Leftrightarrow 2(mx-1)\sqrt{4x-7}+2(x+2)\sqrt{2x^2-2x+12}=(3+m^2)x^2+2(3-m)x+10$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{4x-7} \\ b=mx-1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=m^2x^2+(4-2m)x-6$

và $\begin{cases} c=\sqrt{2x^2-2x+12} \\ d=x+2 \end{cases} \Rightarrow c^2+d^2=3x^2+2x+16$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=(3+m^2)x^2+3(2-m)x+10$

Phương trình trở thành $(a-b)^2+(c-d)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$

Trả biến ta được $\begin{cases} \sqrt{4x-7}=mx-1 & (1) \\ \sqrt{2x^2-2x+12}=x+2 & (2) \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2-6x+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\end{array}\right.$(thỏa mãn)

+ Với $x=2$: $(1)\Rightarrow 1=2m-1\Leftrightarrow m=1$

+ Với $x=4$: $(1)\Rightarrow 3=4m-1\Leftrightarrow m=1$.

Email: nguyentuyetle77@gmail.com

Câu 17. Phương trình $m(|x|+\sqrt{1-x^2}+1)=2\sqrt{x^2-x^4}+|x|+\sqrt{1-x^2}+2$ $(x\in\mathbb{R})$ có nghiệm với tất cả các giá trị của $m\in\left[\frac{a}{b};c\sqrt{2}-d\right]$ với a,b nguyên dương và $(a,b)=1$. Khi đó tổng $S=a+b+c+d$ là:

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Họ và tên: Nguyễn Thị Tuyết Lê. **Tên facebook: Nguyen Tuyet Le**

Bài giải: Điều kiện: $|x|\le 1$. Đặt

$t=|x|+\sqrt{1-x^2}\ge 0\Rightarrow t^2=x^2+1-x^2+2|x|\sqrt{1-x^2}=1+2|x|\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 1\le t$.

Mặt khác: $2|x|\sqrt{1-x^2}\le x^2+1-x^2=1$(BĐT Cô si) $\Rightarrow t\le\sqrt{2}$. Do đó: $1\le t\le\sqrt{2}$

Khi đó $t^2=x^2+1-x^2+2|x|\sqrt{1-x^2}\ge 0\Rightarrow |x|\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^2-x^4}=\frac{t^2-1}{2}$.

Thay vào phương trình ta được:

$m(t+1)=t^2+t+1\Leftrightarrow\frac{t^2+t+1}{t+1}=m$. với $1\le t\le\sqrt{2}$.

Đặt $f(t)=\frac{t^2+t+1}{t+1}, t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$. Lúc đó: $f'(t)=\frac{2t+1}{(t+1)^2}>0,\forall t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[1;\sqrt{2}\right]$, do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$f(1)\le m\le f(\sqrt{2})\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le m\le 2\sqrt{2}-1$. Do đó $a=3,b=2,c=2,d=1$. Vì vậy: $S=a+b+c+d=8$

Gmail: **B**inh.thpth**A**ulo**C**2@gm**A**il.**C**om

Họ tên: Phạm Văn Bình **FB: Phạm Văn Bình**

Câu 18. Cho phương trình: $-x^2+2x+4\sqrt{(3-x)(x+1)}=m-3\,(1)$ trong đó x là ẩn, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2018;2018]$ để phương trình (1) không có nghiệm thự**c.**

A. 4014. **B.** 4024. **C.** 4034. **D.** 4036.

Lời giải

Đáp án B

Cách 1: Đặt $t=\sqrt{(3-x)(x+1)}$ thì $0\le t\le 2$.

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2+4t-m=0\Leftrightarrow f(t)=t^2+4t=m$ (2)

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t\in[0;2]$.

Xét $f(t)=t^2+4t$ trên $[0;2]$

t		0 2	
f(t)		0 ↗ 12	

Từ bảng biến thiên ta thấy PT có nghiệm khi và chỉ khi $0\le m\le 12$.

Do đó $\left[\begin{matrix} m>12 \\ m<0 \end{matrix}\right.$ thì (*) phương trình **không** có nghiệm thực.

Mà $m\in\mathbb{Z}\ \&\ m\in[-2018;2018]$ $\quad(**)$

Nên có 4024 giá trị m thỏa mãn YCBT.

Cách 2

Đặt $t=\sqrt{(3-x)(x+1)}$, điều kiện $0\le t\le 2$.

Khi đó phương trình (1) trở thành: $f(t)=t^2+4t-m=0 \quad (2)$

Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) vô nghiệm $t\in[0;2]$

TH1: (2) vô nghiệm trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'=4+m<0\Leftrightarrow m<-4$

TH2: (2) có nghiệm kép $t\notin[0;2]\Leftrightarrow m=-4$

TH3: Do a = 1 > 0 nên (2) có hai nghiệm phân biệt $t\notin[0;2]\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\Delta'=4+m>0\\ f(0).f(2)>0\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}m>12\\ -4<m<0\end{matrix}\right.$

$\Leftrightarrow -m(12-m)<0\Leftrightarrow 0<m<12$

Tổng hợp lại ta có $\left[\begin{matrix} m>12 \\ m<0 \end{matrix}\right.$ thì (*) phương trình không có nghiệm thực.

Mà $m\in\mathbb{Z}\ \&\ m\in[-2018;2018]$

Nên có 4024 giá trị m thỏa mãn YCBT.

Họ tên: Phạm Văn Bình **FB: Phạm Văn Bình**

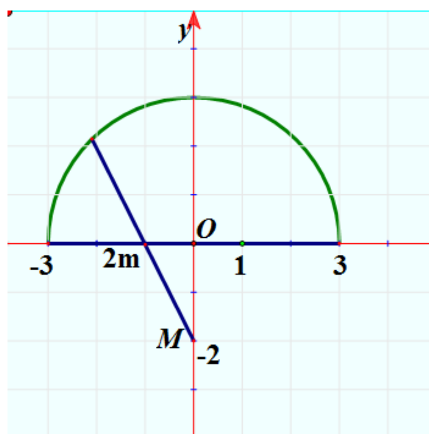
Email: ***trAnquoCAn1980@gmAil.Com***

Câu 19. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $m\sqrt{9-x^2}-x+2m=0$ (1) có nghiệm .

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Họ và tên tác giả : Trần Quốc An ***Tên FB: Tran Quoc An***

Lời giải



Chọn B

Điều kiện : $-3\le x\le 3$. Đặt $\sqrt{9-x^2}=y, y\ge 0\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y\ge 0\end{cases}$ (C).

Khi đó phương trình đã cho trở thành : $my-x+2m=0$ (d)

Phương trình (1) có nghiệm khi nửa đường tròn (C)

và đường thẳng (d) có điểm chung.

Mà đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $M(0;-2)$

và cắt Ox tại điểm có hoành độ 2m.

Nửa đường tròn (C) cắt Ox tại hai điểm $A(-3;0), B(3;0)$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi

$-3\le 2m\le 3\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le m\le \frac{3}{2}$.

Vậy số giá trị nguyên của m là 3.

Cách 2: Cô lập m xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}+2}$ trên đoạn $[-3;3]$

Email: alm.maths@gmail.com

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình $x^2-2ax+\sqrt{2x^2+a^2}=|x+a|$ có đúng một nghiệm không âm.

A. $a\in\mathbb{R}$. **B.** $a\ge 0$. **C.** $a\le 0$. **D.** $a<0$.

Lê Minh An FB: Lê Minh An

Lời giải

Chọn C

Phương trình tương đương với $\left(2x^2+a^2\right)+\sqrt{2x^2+a^2}=(x+a)^2+|x+a|$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+a^2}-|x+a|\right)\left(\sqrt{2x^2+a^2}+|x+a|+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+a^2}=|x+a|$

$\Leftrightarrow x^2-2ax=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array}\right.$.

Phương trình có đúng một nghiệm x không âm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 2a=0 \\ 2a\notin[0;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow a\le 0$.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình $(x+1)^2+\sqrt{2x(x+a+1)}=a^2+1+|x+a|$

có đúng một nghiệm thuộc $[-2;2]$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Lê Minh An FB: Lê Minh An

Chọn B

Phương trình tương đương với

$\left(2x^2+2ax+2x\right)+\sqrt{2x^2+2ax+2x}=(x+a)^2+|x+a|$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+2ax+2x}-|x+a|\right)\left(\sqrt{2x^2+2ax+2x}+|x+a|+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2ax+2x}=|x+a|$

$\Leftrightarrow x^2+2x=a^2 \quad (1)$

Xét hàm số $f(x)=x^2+2x$ trên $[-2;2]$ có bảng biến thiên

x	-2	-1	2
$f(x)$	0 ↘	-1 ↗	8

Để thỏa mãn đề bài thì (1) có đúng 1 nghiệm thuộc $[-2;2]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $0<a^2\le 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a\ne 0 \\ -\sqrt{8}<a<\sqrt{8}. \end{cases}$

Mà $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{\pm1;\pm2\}$.

Câu 22. Cho phương trình $x^3+x^2-(m+1)x+8=(x-3)\sqrt{x^3+x^2-mx+6}$ **.** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn $m\le 10$ để phương trình có nghiệm. Tính tổng T các phần tử của S?

A. $T=52$. **B.** $T=10$. **C.** $T=19$. **D.** $T=9$.

Lời giải

Họ và tên : Đào Hữu Nguyên ***Tên FB: Đào Hữu Nguyên***

Chọn C

Điều kiện :

$pt \Leftrightarrow x^3+x^2-mx+6-(x-3)\sqrt{x^3+x^2-mx+6}-(x-2)=0$

Đặt $t=\sqrt{x^3+x^2-mx+6}, t\ge 0$

Ta được phương trình: $t^2-(x-3)t-(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=x-2 \end{array}\right.$

Nên chỉ có $t=x-2$ có $\sqrt{x^3+x^2-mx+6}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^3+2=(m-4)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2+\dfrac{2}{x}=m-4 \end{cases}$

Lớp 10: Với $x\ge 2$ ta có $x^2+\dfrac{2}{x}=\left(x^2+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{x}\right)-\dfrac{14}{x}\ge 3\sqrt[3]{x^2.\dfrac{8}{x}.\dfrac{8}{x}}-\dfrac{14}{2}=5$

Dấu bằng xảy ra khi $x=2$

Suy ra để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m-4\geq 5 \Leftrightarrow m\geq 9$

Từ cùng với yêu cầu của đề bài ta có $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[9;10] \end{cases}$ nên $m\in\{9;10\}$. Thử lại m = 9 và m = 10 PT đều có nghiệm. Vậy $T=19$.

Lớp 12: Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$, $x\in[2;+\infty)$

Email: doantv.toan@gmail.com

Câu 23. Cho phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}+\sqrt{(x-1)(2-x)}=m$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị m để phương trình có ít nhất hai nghiệm mà trong các nghiệm đó có hai nghiệm thỏa mãn tích của chúng bằng $2m$. Giá trị của S gần với số nào sau đây nhất.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Trần Văn Đoàn Tên FB: Trần Văn Đoàn

Chọn C

Cách 1 Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1}=a \\ \sqrt{2-x}=b \end{cases}$ ta có hệ $(I):\begin{cases} a+b+ab=m \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a+b=S & (S\geq 0) \\ ab=P & (P\geq 0) \end{cases}$ thì hệ trở thành $(II):\begin{cases} S+P=m \\ S^2-2P=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=m-S \\ S^2+2S-2m-1=0 \;\; (1) \end{cases}$

Thấy rằng (1) không thể có hai nghiệm không âm phân biệt (vì nếu có hai nghiệm thì tổng chúng là âm); nên pt (1) chỉ có tối đa một nghiệm *S* thỏa mãn $S\geq 0$; tức hệ *(II)* có tối đa một nghiệm $(S;P)$ thỏa mãn điều kiện; suy ra hệ *(I)* có tối đa hai nghiệm *(a;b)*. Từ đó có thể kết luận rằng phương trình đã cho có tối đa hai nghiệm phân biệt. Vậy yêu cầu đề bài trở thành phương trình đã cho có đúng hai nghiệm và tích hai nghiệm đó bằng *2m*.

Tiếp tục thấy rằng nếu *x* là một nghiệm của phương trình thì $3-x$ cũng là một nghiệm của phương trình nên theo đề bài thì ta có $x(3-x)=2m$ hay $P^2+2=2m$.

Vậy ta có $\begin{cases} S+P=m \\ S^2-2P=1 \\ P^2+2=2m \end{cases}$ Rút ra $S^4-6S^2-8S+13=0 \Leftrightarrow S=1$, suy ra $P=0; m=1$

Thử lại với $m=1$ thấy thỏa mãn suy ra bài toán có giá trị *m* duy nhất là 1.

Cách 2 Cách làm của thầy **Nguyễn Văn Quý**: Giải trực tiếp hệ *(II)* thu được $\begin{cases} S=\sqrt{2(m+1)}-1 \\ P=m=1-\sqrt{2m+2} \end{cases}$

và suy ra $a;b$ là các nghiệm của phương trình $t^2-St+P=0$ nên có tối đa hai giá trị a nhận được hay phương trình có tối đa hai nghiệm. Giả sử hai giá trị a thu được (là hai nghiệm phương trình trên) là $a_1;a_2$, suy ra hai nghiệm của phương trình đã cho là $a_1^2+1;a_2^2+1$. Vậy theo đề bài ta có

$\left(a_1^2+1\right)\left(a_2^2+1\right)=2m$

$\Leftrightarrow (S+P)^2-2SP-2P+1=2m$

$\Leftrightarrow m^2-m+2=(2m-1)\sqrt{2m+2}$

$\Leftrightarrow m^2-5m+4=(2m-1)\left(\sqrt{2m+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow (m-1)\left(m-4-\dfrac{2(2m-1)}{\sqrt{2m+2}+2}\right)=0 \Leftrightarrow m=1$

(Do từ giả thiết đánh giá được $0\le a;b\le 1 \Rightarrow S\le 2 \Rightarrow m<4$)

Email: canh08@gmail.com

Câu 24. Gọi $S=\left(-\infty;\dfrac{a}{b}\right]$ (với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$) là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $\left(2x^2+mx+1\right)\sqrt{2x^2+mx+1}+\sqrt{2x^2+mx+1}=x^3+9x^2+28x+30$ có hai nghiệm phân biệt. Tính $B=a^2-b^3$.

A. $B=334$. **B.** $B=-440$. **C.** $B=1018$. **D.** $B=8$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Bùi Văn Cảnh ***Tên FB: Xoài Tây***

Chọn A

Ta có $\left(2x^2+mx+1\right)\sqrt{2x^2+mx+1}+\sqrt{2x^2+mx+1}=x^3+9x^2+28x+30$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right)^3+\sqrt{2x^2+mx+1}=(x+3)^3+(x+3)$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right)=f(x+3)$ với $f(t)=t^3+t, \forall t\in\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$f\left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right)=f\left(x+3\right)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+mx+1}=x+3(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ x^2+(m-6)x-8=0\ (2)\end{cases}.$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 đều lớn hơn hoặc bằng -3. Do đó ta có:

$$\begin{cases}\Delta=(m-6)^2+32>0\\(x_1+3)(x_2+3)\ge 0\\(x_1+3)+(x_2+3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1x_2+3(x_1+x_2)+9\ge 0\\(x_1+x_2)+6>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8+3(6-m)+9\ge 0\\6-m+6>0\end{cases}\begin{cases}m\le\dfrac{19}{3}\\m<12\end{cases}\Leftrightarrow m\le\frac{19}{3}\text{ hay }m\in\left(-\infty;\frac{19}{3}\right].$$

Suy ra $a=19,b=3$.

Vậy $B=a^2-b^3=334$.

Email: mihawkdaculamihawkdacula@gmail.com

Câu 25. Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2\sqrt{x+\sqrt{1-x^2}}-2\sqrt{m}+1-m^2+2x\sqrt{1-x^2}=0$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Hỏi đoạn $[a;b]$ giao với khoảng nào sau đây thì khác rỗng?

A. $\left(\frac{7}{5};2\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{8}{5};\frac{9}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{-1}{2};0\right)$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Trần Tín Nhiệm ***Tên FB: Trần Tín Nhiệm***

Chọn A

$2\sqrt{x+\sqrt{1-x^2}}-2\sqrt{m}+1-m^2+2x\sqrt{1-x^2}=0\ (*)$

ĐKXĐ: $\begin{cases}1-x^2\ge 0\\x+\sqrt{1-x^2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-\sqrt{2}}{2}\le x\le 1.$

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2},t\ge 0.$ Suy ra $2x\sqrt{1-x^2}=t^2-1$.

PT (*) trở thành : $2\sqrt{t}+t^2=2\sqrt{m}+m^2\Leftrightarrow f(t)=f(m)$.

Với $f(u)=2\sqrt{u}+u^2,u\ge 0.$ $f'(u)=\frac{1}{\sqrt{u}}+2u>0,\forall u>0.$

Do đó f đồng biến trên $[0;+\infty)$. Suy ra $f(t)=f(m)\Leftrightarrow t=m$.

Theo bđt Bunhiacopski, ta có: $t\le\sqrt{1+1}\sqrt{x^2+1-x^2}=\sqrt{2}\Rightarrow 0\le t\le\sqrt{2}$.

($t=0$ khi $x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$; $t=\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

Vậy $0\le m\le\sqrt{2}$ thì thỏa ycbt, lúc này $[a;b]=[0;\sqrt{2}]\cap\left[\dfrac{7}{5};2\right]\ne\varnothing$. Chọn phương án **A.**

Email: lehongphivts@gmail.com

Câu 26. Cho phương trình $x^3+3mx+1-m=(3x+m-1)\sqrt{x^3+1}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình có ít nhất 2 nghiệm phân biệt?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 4036. **D.** 4037.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Lê Hồng Phi ***Tên FB:Lê Hồng Phi***

Chọn D

Điều kiện $x^3+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$.

Khi đó ta có $x^3+3mx+1-m=(3x+m-1)\sqrt{x^3+1}$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2-(3x+m-1)\sqrt{x^3+1}+3mx-m=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^3+1}=m & (1)\\ \sqrt{x^3+1}=3x-1. & (2)\end{array}\right.$$

Ta có $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{3}\\ x^3+1=9x^2-6x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{57}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{57}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $x\ge -1$).

Như thế, phương trình đã cho luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt mà không phụ thuộc vào m.

Vậy có tất cả 4037 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm phân biệt.